

2998

5685.

# SPRAWOZDANIE DYREKTORA

c. k.

## GIMNAZYUM NOWODWORSKIEGO

CZYLI

ŚW. ANNY W KRAKOWIE

za rok szkolny 1879.



KRAKÓW.

Nakładem Funduszu szkolnego.

W drukarni Wł. L. Anczyca i Sp.

1879.



Treść:

O kongruencji liczb w zastosowaniu do rozwiązywania zrównań nieoznaczonych pierwszego stopnia przez Br. Gustawicza.  
Część administracyjna przez Dyrektora.



# O KONGRUENCYI LICZB

w zastosowaniu

do rozwiązywania zrównań nieoznaczonych  
pierwszego stopnia.

---

Rozwiązując zrównania nieoznaczone czyli tak zwane dyjofantyczne, zakładamy, aby pierwiastki niewiadomych ilości czyniły zadość pewnym z góry założonym warunkom; i tak mówimy, aby owe pierwiastki były całkowite albo dodatnie, albo téż równocześnie całkowite i dodatnie, skutkiem czego nieskończoną ilość rozwiązań danego zagadnienia znacznie ograniczamy i ścieśniamy. Sposoby powszechnie podawane w książkach szkolnych do rozwiązywania takichże zadań i wykładane uczniom szkół średnich tak gimnazyjalnych jak realnych są częstokroć bardzo żmudne i wiele czasu wymagające. W niniejszej pracy wyłożyłem inny sposób rozwiązywania zrównań nieoznaczonych pierwszego stopnia, prowadzący do celu w czasie daleko krótszym, a polegający na „kongruencyi liczb“, której teoriąją podał pierwszy znakomity matematyk i astronom GAUSS. Teoriąją tę rozwinąłem w krótkości o tyle, o ile okazała się potrzebną do zastosowania w rozwiązywaniu tychże zrównań. Jest ona tak łatwą i przystępną, iż nawet uczniowie czwartej klasy gimnazyjalnej mogą ją łatwo zrozumieć i zastosować do rozwiązania podobnych zagadnień.

W polskim języku nie nie pisano, o ile mi tylko wiadomo, w tymże kierunku. Zmuszony więc byłem w naukę arytmetyki wprowadzić nowe nazwy, t. j. „kongruencyja



liczb“ lub „zgodność liczb“ i „liczby kongruentne“ lub „liczby zgodne“, które w zupełności oddają to, co znakomity GAUSS w swoich „*Disquisitiones arithmeticae*“ nazwał „*Congruentia numerorum*“ i „*Congruentes numeri*“.

Przykłady w niniejszej rozprawce podane wyjęte są po największej części z książki szkolnej u nas używanj „*Arytmetyka i Algebra Dra Moćnika*“, jakoteż z „*Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra*“ (Berlin, 1797) i „*Dr. E. Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra*“ (Köln, 1876).

W końcu podaje rozprawy dotyczące się tegoż przedmiotu.

1. *Disquisitiones arithmeticae* auctore D. CAROLO FRIDERICO GAUSS. Lipsiae, 1801.

2. *Grundlehren der Zahlentheorie* von GUSTAV KRIVAN. Wien, 1862.

3. *Prinzipien der Arithmetik* von Dr. FRIEDRICH GRELLÉ. Hannover, 1863.

4. *Vorlesungen über Zahlentheorie* von P. G. LEJEUNE-DIRICHLET. Herausgegeben von R. DEDEKIND. Braunschweig, 1863.

5. *Die Elemente der Zahlentheorie* von Dr. M. SCHWARZ. Berlin, 1864.

6. *Zahlen-Congruenzen* von FR. ANDERLE w programie c. k. gimnazyjum w Znojmie z r. 1866.

7. *Grundlehren der höheren Arithmetik* von Direktor JOSEF KNIRB. Panczova, 1872.

Małą tę pracę puszczam w świat w nadziei, że przyniesie pewne korzyści uczącj się młodzieży naszj.

W Krakowie, 1 maja 1879.

*Bronisław Gustawicz.*



## §. 1.

### Pojęcie kongruencji liczb.

1. Mamy dane dwie liczby całkowite  $a$  i  $b$ . Oznaczmy ich różnicę przez  $c$ . Jeżeli ta różnica  $c$  tych dwóch liczb  $a$  i  $b$  jest podzielna przez trzecią liczbę  $m$ , natenczas mówimy, że obie te dane liczby  $a$  i  $b$  zgadzają się z sobą co do téj trzeciej liczby  $m$ . Z tego powodu liczby  $a$  i  $b$  zowiemy liczbami kongruentnymi lub zgodnymi (*congruente Zahlen*), liczbę zaś  $m$  ich modułem (*Modulus*).

Liczby całkowite  $a$  i  $b$  mogą być albo dodatne albo odjemne; moduł zaś jest zawsze liczbą całkowitą bezwzględna.

Pierwszym, co podał to pojęcie liczb kongruentnych, był znakomity astronom i matematyk GAUSS\*). Do oznaczenia, że dwie liczby  $a$  i  $b$  są co do trzeciej liczby  $m$  kongruentne, wprowadził GAUSS w naukę liczb osobny znak, składający się z trzech równoległych krósek poziomych, t. j.  $\equiv$ . Piszemy więc

$$a \equiv b \pmod{m},$$

albo krócej

$$a \equiv b_{(m)},$$

co czytamy: „liczba  $a$  zgadza się z liczbą  $b$  co do modułu  $m$ “.

Tak np.

$$\begin{array}{lll} 17 \equiv 9_{(4)}, & \text{bo } 17 - 9 = 8, & 8 : 4 = 2; \\ 3 \equiv -25_{(7)}, & \text{bo } 3 - (-25) = 28, & 28 : 7 = 4; \\ 69 \equiv 14_{(11)}, & \text{bo } 69 - 14 = 55, & 55 : 11 = 5 \text{ i t. d.} \end{array}$$

---

\*) Karol Fryderyk Gauss urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunzwicku, od r. 1807 profesor i dyrektor obserwatorium w Gotyndze, gdzie zmarł dnia 23 lutego 1855.



Zestawienie dwóch liczb  $a$  i  $b$ , kongruentnych co do trzeciéj liczby  $m$ , modułem zwanéj, zapomocą znaku  $\equiv$ , nazywa się kongruencyją lub zgodnością liczb (*Zahlencongruenz*).

2. Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

to z pojęcia téj kongruencyi wynika, że

$$\frac{a - b}{m} = t$$

czyli

$$a = b + mt,$$

które to zrównanie podaje nam inne określenie pojęcia „kongruencyi“, a zwłaszcza: „Gdy dana liczba  $a$  równa się drugiéj liczbie  $b$  powiększonéj o wielokrotność trzeciéj liczby  $m$ , to mówimy, że liczby  $a$  i  $b$  są kongruentne co do  $m$ ; tę trzecią liczbę  $m$  zowiemy *modułem* téj kongruencyi.“

*Wniosek 1.* Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

gdzie

$$a > b,$$

to otrzymujemy zrównanie

$$a = b + mt$$

t. zn.: Każdą kongruencyją zamienić można na zrównanie, dodając do mniejszój jéj strony uzupełniającą wielokrotność modułu.

Np. 1. Z kongruencyi

$$7x \equiv 2_{(5)}$$

otrzymujemy zrównanie

$$7x = 2 + 5y$$

czyli

$$7x - 5y = 2.$$

2. Z kongruencyi

$$19x \equiv -14_{(17)}$$

mamy

$$19x - 17y = -14.$$



*Wniosek 2.* Niech będzie dane zrównanie

$$ax + by = c.$$

Z zrównania tego otrzymujemy kongruencyją

$$ax \equiv c_{(b)}$$

albo

$$by \equiv c_{(a)},$$

t. zn.: Każde zrównanie można zamienić na kongruencyją, opuszczając w niem wielokrotność jednej liczby, którą wtedy uważamy za moduł kongruencyi.

Np. 1. Zrównanie

$$62x - 71y = 798$$

otrzymujemy kongruencyją

$$62x \equiv 798_{(71)},$$

albo

$$-71y \equiv 798_{(62)}.$$

2. Zrównanie

$$3x + 5y - 7z = 41$$

daje nam kongruencyją

$$5y \equiv 41 + 7z_{(3)},$$

albo

$$3x \equiv 41 - 5y_{(7)},$$

albo

$$-7z \equiv 41 - 3x_{(5)} \text{ i t. d.}$$

*Wniosek 3.* Kongruencyje stopnia pierwszego są tylko skróconemi wyrażeniami zrównań nieoznaczonych stopnia pierwszego.

3. Liczby kongruentne  $a$  i  $b$  co do modułu  $m$  posiadają tę własność, że podzielone liczbą  $m$  pozostawiają równe reszty. I tak

$$a : m = q + \frac{r}{m},$$

$$b : m = q' + \frac{r}{m},$$

gdzie  $r$  oznacza resztę wypadającą z podzielenia  $a$  i  $b$  przez  $m$ . Np.

$$69 \equiv 14_{(11)}, \quad 69 : 11 = 6, \quad r = 3,$$

$$14 : 11 = 1, \quad r = 3;$$

$$137 \equiv 74_{(9)}, \quad 137 : 9 = 15, \quad r = 2,$$

$$74 : 9 = 8, \quad r = 2;$$

$$17 \equiv 9_{(4)}, \quad 17 : 4 = 4, \quad r = 1,$$

$$9 : 4 = 2, \quad r = 1.$$



Z tego też powodu możemy powiedzieć, że dwie liczby  $a$  i  $b$  są kongruentnemi co do modułu  $m$ , jeżeli podzielone modułem  $m$  pozostawiają równe reszty.

*Wniosek 1.* Liczby kongruentne czyli zgodne nazwać można także równo-resztowemi ze względu na trzecią liczbę  $m$ , modułem zwaną. Dlatego też LEGENDRE użył w swojej teorii liczb do oznaczenia kongruencji liczb znaku równości. Jeżeli więc reszta z dzielenia

$$\frac{a - b}{m}$$

ma być równą zeru, czyli ma się spełnić zrównanie

$$r \frac{a - b}{m} = 0,$$

to być musi

$$r \frac{a}{m} = r \frac{b}{m}.$$

Np.

$$32 \equiv 5_{(3)},$$

$$r \frac{32 - 5}{3} = 0,$$

czyli

$$r \frac{32}{3} = r \frac{5}{3},$$

$$2 = 2.$$

*Wniosek 2.* Kongruencyja dwóch liczb co do trzeciój nie przestanie nią być, jeżeli przemienimy miejsca liczb zgodnych między sobą.

Tak np. jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

to także być musi

$$b \equiv a_{(m)}.$$

Albowiem jeżeli

$$a = b + mt,$$

przeto także

$$b = a - mt$$

czyli

$$b = a + mt',$$

przeto

$$b \equiv a_{(m)}.$$



4. Niech będzie daną kongruencyja

$$a \equiv b_{(m)};$$

natenczas być musi

$$\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m},$$

$$\frac{b}{m} = q' + \frac{r}{m};$$

odjawszy obydwie te zrównania od siebie stronami, otrzymamy

$$\frac{a-b}{m} = q - q' = k;$$

ponieważ

$$a - b = c,$$

przeto

$$\frac{a-b}{m} = q - q' = \frac{c}{m},$$

t. zn.: różnica ilorazów  $q$  i  $q'$  otrzymanych z podzielenia liczb kongruentnych  $a$  i  $b$  ich modułem  $m$ , równa się ilorazowi otrzymanemu z podzielenia różnicy  $c$  liczb  $a$  i  $b$  modułem  $m$ .

Tak np.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 69 \equiv 14_{(11)}, \\ & c = 69 - 14 = 55, \\ & q = 69 : 11 = 6, \quad r = 3, \\ & q' = 14 : 11 = 1, \quad r = 3; \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} q - q' &= 6 - 1 = 5 = k, \\ 55 : 11 &= 5 = k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 65 \equiv 16_{(7)}, \\ & c = 65 - 16 = 49, \\ & q = 65 : 7 = 9, \quad r = 2, \\ & q' = 16 : 7 = 2, \quad r = 2; \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} q - q' &= 9 - 2 = 7 = k, \\ 49 : 7 &= 7 = k. \end{aligned}$$


---



## §. 2.

**Twierdzenia o kongruencji liczb.**

1. Każda liczba zgadza się sama z sobą co do każdego modułu.

$$\begin{aligned} & a \equiv a_{(m)}, \\ \text{bo} \quad & a - a = 0, \\ & \frac{0}{m} = 0. \end{aligned}$$

2. Każda liczba kongruentna z zerem co do modułu  $m$  jest podzielna przez ten moduł.

$$\begin{aligned} & a \equiv 0_{(m)}, \quad \text{bo} \quad a - 0 = a, \quad a : m = k; \\ 49 & \equiv 0_{(7)}, \quad \text{bo} \quad 49 - 0 = 49, \quad 49 : 7 = 7; \\ 132 & \equiv 0_{(11)}, \quad \text{bo} \quad 132 - 0 = 132, \quad 132 : 11 = 12 \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

3. Dzielna jest kongruentna z resztą dzielenia, przyczém albo dzielnik albo iloraz może być modułem.

Niech będzie

$$a : m = q + \frac{r}{m},$$

czyli

$$a = mq + r,$$

przeto

$$\begin{aligned} a & \equiv r_{(m)}, \\ a & \equiv r_{(q)}. \end{aligned}$$

Np. Jeżeli

$$59 : 9 = 6 + \frac{5}{9},$$

przeto

$$59 \equiv 5_{(6)}$$

i

$$59 \equiv 5_{(9)},$$

bo

$$\frac{59-5}{6} = 9, \quad \frac{59-5}{9} = 6.$$

4. Jeżeli liczba  $a$  jest kongruentną z liczbą  $b$  co do modułu  $m$ , a liczba  $b$  kongruentną



z liczbą  $c$  co do tego samego modułu  $m$ , to liczba  $a$  jest także kongruentną z liczbą  $c$  co do tegoż modułu.

Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

$$b \equiv c_{(m)},$$

to także być musi

$$a \equiv c_{(m)},$$

gdyż reszty wszystkich trzech liczb  $a$ ,  $b$  i  $c$  otrzymane z podzielenia ich modułem, są sobie równe,

$$\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m},$$

$$\frac{b}{m} = q' + \frac{r}{m},$$

$$\frac{c}{m} = q'' + \frac{r}{m}.$$

Albo jeżeli

$$a = b + mt,$$

$$b = c + mt',$$

przeto

$$a + b = b + c + m(t + t')$$

czyli

$$a = c + mt'',$$

$$a \equiv c_{(m)}.$$

Np. Jeżeli

$$124 \equiv 29_{(5)},$$

$$29 \equiv 14_{(5)},$$

to

$$124 \equiv 14_{(5)},$$

gdyż

$$124 : 5 = 24, \quad r = 4,$$

$$29 : 5 = 5, \quad r = 4,$$

$$14 : 5 = 2, \quad r = 4.$$

5. Kongruencyja dwóch liczb nie zmienia się, jeżeli do obu jej stron dodamy tę samą liczbę.



Jeżeli do kongruencji

$$a \equiv b_{(m)}$$

dodamy

$$c = c,$$

otrzymamy kongruencyją co do tego samego modułu

$$(a + c) \equiv (b + c)_{(m)}.$$

Albowiem jeżeli

$$a = b + mt,$$

to także być musi

$$(a + c) = (b + c) + mt$$

czyli stąd otrzymujemy, że

$$(a + c) \equiv (b + c)_{(m)}.$$

Np.

$$137 \equiv 85_{(13)},$$

dodawszy obustronnie 27, otrzymamy także zgodność

$$164 \equiv 112_{(13)},$$

gdyż

$$164 - 112 = 52,$$

$$52 : 13 = 4.$$

6. Kongruencyja dwóch liczb nie zmienia się, jeżeli od obu jej stron odejmiemy tę samą liczbę.

Jeżeli od kongruencji

$$a \equiv b_{(m)}$$

odejmiemy

$$c = c,$$

otrzymamy kongruencyją co do tego samego modułu

$$(a - c) \equiv (b - c)_{(m)}.$$

Dowodzi się jak tw. 5.

Np.

$$137 \equiv 85_{(13)},$$

odjawszy obustronnie 17, otrzymamy także kongruencyją

$$120 \equiv 68_{(13)},$$

gdyż

$$120 - 68 = 52,$$

$$52 : 13 = 4.$$



7. Dwie kongruencyje odnoszące się do tego samego modułu, stronami do siebie dodane, dają na wypadek sumy kongruentne co do tegoż modułu.

Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

tudzież

$$c \equiv d_{(m)},$$

będzie także

$$(a + c) \equiv (b + d)_{(m)}.$$

Albowiem jeżeli

$$a = b + mt,$$

$$c = d + mt',$$

to wskutek dodania będzie

$$(a + c) = (b + d) + m(t + t'),$$

skąd wypływa, że

$$(a + c) \equiv (b + d)_{(m)}.$$

Np.

$$137 \equiv 85_{(13)},$$

$$75 \equiv 23_{(13)},$$

co dodane do siebie stronami daje

$$212 \equiv 108_{(13)},$$

gdyż

$$212 - 108 = 104$$

$$104 : 13 = 8.$$

8. Dwie kongruencyje odnoszące się do tego samego modułu, odjęte od siebie stronami, dają różnice kongruentne co do tegoż modułu.

Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

$$c \equiv d_{(m)},$$

to będzie także

$$(a - c) \equiv (b - d)_{(m)},$$

czego się dowodzi, jak tw. 7.

Np. 1.

$$137 \equiv 85_{(13)},$$

$$75 \equiv 23_{(13)},$$



po odjęciu tych kongruencyj wypada

$$62 \equiv 62_{(13)}.$$

$$2. \quad 69 \equiv 14_{(11)},$$

$$45 \equiv 12_{(11)},$$

stad

$$24 \equiv 2_{(11)},$$

gdyż

$$24 - 2 = 22,$$

$$22 : 11 = 2.$$

U w a g a 1. Twierdzenia 7 i 8 dają się rozszerzyć do dowolnej ilości danych kongruencyj, odnoszących się do tego samego modułu. Kongruencje zatem odnoszące się do tego samego modułu, możemy dodawać lub odejmować, podobnie jak zrównania.

U w a g a 2. Jeżeli

$$a \equiv (b + c)_{(m)},$$

$$c \equiv c_{(m)},$$

to będzie także

$$a - c \equiv (b + c - c)_{(m)},$$

czyli

$$a - c \equiv b_{(m)},$$

t. zn. jak w zrównaniach tak i w kongruencyjach możemy jedną ilość przenieść z pierwszej strony na drugą, zmieniając tylko znak tej ilości na przeciwny.

Np.

$$x + 15 \equiv 4y + 17_{(7)},$$

$$x \equiv 4y + 17 - 15_{(7)},$$

$$x \equiv 4y + 2_{(7)}.$$

9. Jeżeli kongruencyją dwóch liczb pomnożymy obustronnie tą samą liczbą, otrzymamy iloczyny kongruentne co do tegoż modułu.

Jeżeli kongruencyją

$$a \equiv b_{(m)}$$

pomnożymy obustronnie przez  $c$ , otrzymamy

$$ac \equiv bc_{(m)}.$$



Albowiem jeżeli

$$a = b + mt,$$

to także być musi

$$ac = bc + m \cdot ct$$

czyli

$$ac = bc + m \cdot t',$$

skąd mamy

$$ac \equiv bc_{(m)}.$$

Np.

$$37 \equiv 23_{(7)}$$

pomnożywszy obustronnie przez 4, otrzymamy

$$148 \equiv 92_{(7)},$$

gdyż

$$148 - 92 = 56,$$

$$56 : 7 = 8.$$

U w a g a. Na podstawie tego twierdzenia można w danej kongruencji przemienić znaki na przeciwne, mnożąc zgodność obustronnie przez  $-1$ .

Np.

$$-34 \equiv -9_{(5)},$$

skąd po przemianie znaków

$$34 \equiv 9_{(5)}.$$

10. Dwie kongruencje odnoszące się do tego samego modułu pomnożone przez siebie stronami, dają iloczyn kongruentne co do tegoż modułu.

Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)}$$

i

$$c \equiv d_{(m)},$$

to także ich iloczyn będą kongruentne co do tegoż modułu

$$ac \equiv bd_{(m)}.$$

Albowiem

$$a = b + mt,$$

$$c = d + mt',$$



po pomnożeniu stronami wypływa zrównanie

$$ac = bd + m \underbrace{(dt + bt' + mtt')}_{t''}$$

czyli

$$ac = bd + mt'',$$

co nam daje kongruencyją

$$ac \equiv bd_{(m)}.$$

Np.

$$37 \equiv 23_{(7)},$$

$$148 \equiv 92_{(7)},$$

pomnożywszy stronami przez siebie, otrzymujemy

$$5476 \equiv 2116_{(7)},$$

gdyż

$$5476 - 2116 = 3360,$$

$$3360 : 7 = 480.$$

*Wniosek 1.* Na podstawie tego twierdzenia można cały szereg kongruencyj odnoszących się do tego samego modułu mnożyć przez siebie stronami.

$$\text{Np. } A \equiv a_{(m)},$$

$$B \equiv b_{(m)},$$

$$C \equiv c_{(m)},$$

$$D \equiv d_{(m)},$$

$$\dots\dots\dots$$

---


$$ABCD\dots \equiv abcd\dots_{(m)}.$$

*Wniosek 2.* Każdą kongruencyją można podnieść do potęgi dodatniej całkowitej.

Jeżeli mamy

$$A \equiv a_{(m)},$$

$$B \equiv b_{(m)},$$

$$C \equiv c_{(m)}$$

i jeżeli

$$A = B = C,$$

$$a = b = c,$$

to po rozmnożeniu otrzymamy

$$A^3 \equiv a^3,$$



a w ogóle

$$A^n \equiv a^n.$$

Np.

$$17 \equiv 6_{(11)},$$

podniósłszy do kwadratu, otrzymamy nową kongruencyją

$$289 \equiv 36_{(11)},$$

gdyż

$$289 - 36 = 253,$$

$$253 : 11 = 23.$$

*Wniosek 3.* Z każdéj kongruencyi można wy-  
ciągnąć pierwiastek.

Jeżeli

$$a^{2n} \equiv b_{(m)}^{2n},$$

to także być musi

$$a^n \equiv b_{(m)}^n,$$

albo téż

$$a \equiv b_{(m)}.$$

Np.

$$1. \quad 16x^4 \equiv 81_{(7)},$$

$$\sqrt[4]{16x^4} \equiv \sqrt[4]{81}_{(7)},$$

$$4x^2 \equiv 9_{(7)},$$

$$2x \equiv 3_{(7)}.$$

$$2. \quad 83521 \equiv 1296_{(11)}$$

wyciągnąwszy kolejno dwa razy pierwiastek kwadratowy, otrzymamy nową kongruencyją co do tego samego modułu

$$17 \equiv 6_{(11)}.$$

*Wniosek 4.* Na podstawie tegoż twierdzenia łatwo udowodnić można, że różnica równoimiennych potęg dwóch ilości jest zawsze podzielna przez różnicę zasad, bez względu na to, czy wykładnik potęgowy jest parzysty, czy téż nieparzysty.

Mamy zatem udowodnić, że

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = q + 0$$

czyli

$$a^m - b^m \equiv 0_{(a-b)}.$$



Ponieważ

$$(a - b) \equiv 0_{(a-b)},$$

przeto

$$a \equiv b_{(a-b)},$$

czyli

$$a^m \equiv b^m_{(a-b)},$$

albo

$$a^m - b^m \equiv 0_{(a-b)},$$

co podług LEGENDRA pisząc, daje

$$r \frac{a^m - b^m}{a - b} = 0.$$

11. Dwie liczby nie przestaną być kongruentnemi co do tego samego modułu, jeżeli obie strony kongruencji podzielimy tą samą liczbą, niespółmierną z modułem.

Jeżeli

$$ac \equiv bc_{(m)},$$

to dzieląc obie strony téj kongruencji przez liczbę  $c$ , która jest niespółmierna z modułem  $m$ , otrzymamy rzetelną kongruencyją

$$a \equiv b_{(m)}.$$

Np.

$$212 \equiv 108_{(13)},$$

podzieliwszy obie strony przez liczbę 4 (niespółmierną z modułem 13), otrzymamy

$$53 \equiv 27_{(13)},$$

gdyż

$$53 - 27 = 26,$$

$$26 : 13 = 2.$$

Atoli kongruencyja

$$212 \equiv 102_{(10)}$$

podzielona przez liczbę 2, spółmierną z modułem, nie daje wcale kongruencji

$$106 \equiv 51_{(10)},$$

gdyż różnica

$$106 - 51 = 55$$

nie jest podzielna przez 10.



12. Dwie kongruencyje odnoszące się do tego samego modułu podzielone przez siebie stornami, dają ilorazy kongruentne co do tegoż modułu, jeżeli wyrazy jednej kongruencji są niespółmierne z modułem.

Jeżeli ten warunek się nie spełnia, to wskutek dzielenia otrzymana kongruencja nie może być rzetelną ze względu na tensam moduł.

Jeżeli bowiem

$$ac \equiv bd_{(m)}$$

$$i \quad a \equiv b_{(m)},$$

to wskutek dzielenia obu kongruencyj otrzymana kongruencja

$$c \equiv d$$

będzie zawsze co do  $m$  rzetelną, jeżeli tylko  $a$  i  $b$  są niespółmierne z modułem  $m$ .

Albowiem z obu powyższych kongruencyj wynika

$$ac = bd + mt,$$

$$a = b + mt'.$$

Podstawmy w pierwsze równanie za  $b$  wartość wyznaczoną z drugiego równania

$$ac = mt + d(a - mt'),$$

skąd

$$c = \frac{ad + m(t - dt')}{a}$$

czyli

$$c = d + \frac{m}{a}(t - dt'),$$

co daje nam kongruencja

$$c \equiv d_{(m)},$$

jeżeli  $m$  i  $a$  są liczbami niespółmiernymi, wskutek czego  $\frac{t - dt'}{a}$  musi być liczbą całkowitą.

Gdyby atoli  $a$  i  $m$  nie były liczbami niespółmiernymi, to otrzymana kongruencja mogłaby być jeszcze rzetelną, gdyby się spełniło równanie

$$(t - dt') \equiv 0_{(a)},$$

w przeciwnym zaś razie ze względu na moduł  $m$  kongruencja stanie się nierzetelną. Tosamo dotyczy się  $b$  i  $m$ .



$$\begin{aligned} \text{Np.} \quad 330 &\equiv 44_{(11)}, \\ 22 &\equiv 11_{(11)}; \end{aligned}$$

wskutek dzielenia otrzymujemy

$$15 \equiv 4_{(11)},$$

która to kongruencja jest rzetelną, chociaż 22 i 11 nie są niespółmierne. Albowiem spełnia się tutaj

$$(t - dt') \equiv 0_{(a)}$$

czyli

$$26 - 4 \cdot 1 \equiv 0_{(22)},$$

gdyż

$$\frac{26 - 4}{22} = 1.$$

13. Jeżeli dwie liczby  $a$  i  $b$  są kongruentne co do modułu  $m$ , to są one także kongruentne co do każdego dzielnika modułu.

Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)}$$

$a$

$$m = pq,$$

to także być musi

$$a \equiv b_{(p)}$$

$i$

$$a \equiv b_{(q)}.$$

Np. Jeżeli

$$179 \equiv 74_{(15)},$$

to również zachodzą kongruencje

$$179 \equiv 74_{(3)},$$

$i$

$$179 \equiv 74_{(5)}.$$

14. Jeżeli dwie liczby  $a$  i  $b$  są kongruentne co do modułu  $m$ , będącego iloczynem dwóch liczb  $p$  i  $q$ , to także ilorazy tych liczb  $a$  i  $b$  będą kongruentne co do drugiego czynnika.

Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

$$m = pq,$$



to także będzie

$$\frac{a}{p} \equiv \frac{b}{p}^{(q)},$$

albo

$$\frac{a}{q} \equiv \frac{b}{q}^{(p)}.$$

Albowiem

$$a = b + mt$$

czyli

$$a = b + p \cdot q \cdot t,$$

przeto

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{p} + q \cdot t$$

czyli

$$\frac{a}{p} \equiv \frac{b}{p}^{(q)}.$$

*Wniosek.* Jeżeli wszystkie wyrazy kongruencji i moduł mają spólną miarę, trzeba kongruencyją i moduł przez tężże uprościć. Otrzymana kongruencyja będzie rzetelną.

15. Jeżeli dwie liczby  $a$  i  $b$  są kongruentne co do kilku modułów, będących między sobą liczbami względnie pierwszymi, to te dwie liczby są także kongruentne co do modułu, będącego iloczynem wszystkich danych modułów.

Jeżeli

$$a \equiv b_{(m)},$$

$$a \equiv b_{(n)},$$

$$a \equiv b_{(o)},$$

gdzie  $m, n, o$  są liczbami pierwszymi względem siebie, to także być musi

$$a \equiv b_{(mno)}$$

czyli

$$a \equiv b_{(q)},$$

gdzie

$$q = mno.$$

Np.

$$164 \equiv 89_{(3)},$$

$$164 \equiv 89_{(5)},$$

gdzie moduły 3 i 5 są liczbami względnie pierwszymi, zatem



gdyż

$$164 \equiv 89_{(15)},$$

$$164 - 89 = 75,$$

$$75 : 15 = 5.$$

## §. 3.

## Porządkowanie kongruencji.

1. Jak zrównania, tak też kongruencją rozróżniamy z jedną niewiadomą, dwiema lub kilku niewiadomymi. I tutaj owe szczególne wartości niewiadomych  $x, y, \dots$ , czyniące zadosyć danej kongruencji czyli sprawdzające daną kongruencją, zowią się pierwiastkami kongruencji (*Wurzeln der Congruenz*).

Rozwiązać daną kongruencją znaczy wyznaczyć wszystkie jej pierwiastki.

2. Aby daną kongruencją rozwiązać, należy ją nasamprzód uporządkować. Uporządkowanie danej kongruencji uskutecznia się według następujących twierdzeń.

Niech będzie dana kongruencją

$$32 \equiv 11_{(7)}.$$

a) Dodawszy do pierwszej lub do drugiej strony téj kongruencji jakąkolwiek wielokrotność modułu lub też obustronnie jakąkolwiek wielokrotności tegoż, otrzymamy zawsze kongruencją odnoszącą się do tegosamego modułu; zatem mieć będziemy

$$39 \equiv 11_{(7)}, \text{ bo } 39 - 11 = 28, \quad 28 : 7 = 4,$$

$$32 \equiv 25_{(7)}, \text{ bo } 32 - 25 = 7, \quad 7 : 7 = 1,$$

$$53 \equiv 18_{(7)}, \text{ bo } 53 - 18 = 35, \quad 35 : 7 = 5 \text{ i t. d.}$$

b) Odjawszy od pierwszej lub drugiej strony danéj kongruencji jakąkolwiek wielokrotność modułu lub też obustronnie jakąkolwiek wielokrotności tegoż, otrzymamy zawsze kon-



gruencyją odnoszącą się do tego samego modułu; zatem mieć będziemy

$$\begin{aligned} 25 &\equiv 11_{(7)}, & \text{bo } 25 - 11 &= 14, & 14 : 7 &= 2, \\ 32 &\equiv 4_{(7)}, & \text{bo } 32 - 4 &= 28, & 28 : 7 &= 4, \\ 11 &\equiv 4_{(7)}, & \text{bo } 11 - 4 &= 7, & 7 : 7 &= 1 \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

c) Dodawszy do jednej strony kongruencji jakąkolwiek wielokrotność modułu a od drugiej odjawszy równocześnie jakąkolwiek wielokrotność tegoż, otrzymamy zawsze kongruencyją odnoszącą się do tegoż modułu; przeto będzie

$$46 \equiv -3_{(7)}, \quad \text{bo } 46 + 3 = 49, \quad 49 : 7 = 7 \text{ i t. d.}$$

W ogóle więc możemy każdą stronę kongruencji, każdy współczynnik téjże strony powiększyć lub pomniejszyć o wielokrotność modułu.

*Dowód.* 1. Niech będzie dana kongruencyja

$$a \equiv b_{(m)},$$

która daje zrównanie

$$a = b + mt.$$

Dodajmy do tego zrównania lub odciągamy od niego obustronnie równe ilości

$$mq + mq' = mq + mq',$$

a otrzymamy równe wypadki

$$\begin{aligned} a \pm mq \pm mq' &= b \pm mq \pm mq' + mt, \\ a \pm mq &= b \pm mq' \pm mq \mp mq' + mt, \\ a \pm mq &= b \pm mq' + m \underbrace{(\pm q \mp q' + t)}_{q''}, \end{aligned}$$

zatem

$$a \pm mq = b \pm mq' + mq''$$

czyli

$$a \pm mq \equiv b \pm mq'_{(m)},$$

gdzie  $q$  i  $q'$  mogą posiadać różne wartości całkowite albo też równać się zeru.

Np. Jeżeli

$$33 \equiv 5_{(7)},$$



to także mieć będziemy prawdziwe kongruencje co do modułu 7:

$$\begin{aligned} 33 \pm 7 &\equiv 5 \pm 7, & 33 \pm 14 &\equiv 5, \\ 33 \pm 14 &\equiv 5 \pm 14, & 33 \pm 14 &\equiv 5 \pm 7, \\ 33 \pm 21 &\equiv 5 \pm 21, & 33 \pm 21 &\equiv 5, \\ 13 \pm 22 &\equiv 5 \pm 14 \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

2. Niech będzie dana kongruencja

$$a \equiv b + c_{(m)},$$

to także być musi

$$a \pm mt \equiv b \pm mt' + c \pm mt'',$$

gdzie  $t, t', t''$  są albo liczbami całkowitemi albo równają się zeru.

Tak np. jeżeli

$$15x \equiv 5 + 6y_{(2)},$$

to także będzie

$$\begin{aligned} \text{czyli} \quad 1) \quad & 15x - 2x \equiv 5 + 6y - 4y, \\ & 13x \equiv 5 + 2y_{(2)}; \\ 2) \quad & 15x - 6x \equiv 5 - 4 + 6y - 6y, \\ \text{czyli} \quad & 9x \equiv 1_{(2)}; \\ 3) \quad & 15x - 14x \equiv 5 - 4 + 6y - 10y, \\ \text{czyli} \quad & x \equiv 1 - 4y_{(2)}; \\ 4) \quad & 15x - 14x \equiv 5 - 4 + 6y - 6y, \\ \text{czyli} \quad & x \equiv 1_{(2)}. \end{aligned}$$

Powyższe twierdzenie jest w nauce o kongruencyjach liczb bardzo ważne, gdyż na podstawie tegoż możemy każdą daną kongruencję przed rozwiązaniem uporządkować.

W uporządkowaniu danéj kongruencji chodzi nam o to, *a)* aby wszystkie liczby wchodzące w skład danéj kongruencji były dodatne i mniejsze od modułu, albo *b)* aby wszystkie liczby kongruencji bez względu na znak były mniejsze lub co najwięcej równe połowie modułu kongruencji.

W pierwszym przypadku mówimy, że kongruencje posiadają najmniejsze dodatne rezydua czyli pozostałości, w drugim zaś, że mają najmniejsze rezydua.



*Przykłady.* 1. Mamy daną kongruencyją

$$- 23x \equiv 67_{(7)}.$$

Aby uzyskać kongruencyją z dodatnimi najmniejszymi rezyduami, dodajmy do pierwszej strony liczbę  $28x$ , a otrzymamy kongruencyją

$$5x \equiv 67_{(7)},$$

która po odjęciu  $63$  od drugiej strony przechodzi w następującą żadaną kongruencyją

$$5x \equiv 4_{(7)}$$

przedstawioną w najmniejszych dodatnich rezyduach.

2. Niech będzie dana kongruencyja

$$31x \equiv 89_{(11)}.$$

Aby ją przedstawić w najmniejszych rezyduach, t. j. mniejszych lub co najwięcej równych połowie modułu bez względu na znak, odciągnijmy od pierwszej strony  $33x$ , a od drugiej  $88$ , a otrzymamy następującą kongruencyją

$$- 2x \equiv 1_{(11)}.$$

3. Kongruencyja

$$33x \equiv 70_{(17)}$$

po uporządkowaniu daje

$$- x \equiv 2.$$

#### §. 4.

#### Rozwiązanie kongruencyi

$$ax \equiv b_{(m)}.$$

1. Kongruencyja postaci  $ax \equiv b$ , w której ilość niewiadoma  $x$  przychodzi w pierwszym stopniu, zowie się kongruencyją pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

2. Aby tę kongruencyją rozwiązać, muszą liczby  $a$  i  $m$  być niespółmierne; w przeciwnym wypadku kongruencyja musi



być przez spólną miarę podzielną. Albowiem przemienimy powyższą kongruencyją w zrównanie

$$ax + my = b.$$

Jeżeli przypuścimy, że współczynniki  $a$  i  $m$  mają spólną miarę  $n > 1$ , której liczba  $b$  nie ma, to musiałyby być  $\frac{a}{n}$  i  $\frac{m}{n}$  całkowitymi liczbami, a  $\frac{b}{n}$  ułamkiem; zrównanie w tym razie istniejące

$$\frac{a}{n} x + \frac{m}{n} y = \frac{b}{n}$$

zawierałoby dla całkowitych wartości za  $x$  i  $y$  oczywistą sprzeczność, gdyż suma dwóch całkowitych liczb równałaby się podług niego ułamkowi.

Jeżeliby spólna miara liczb  $a$  i  $m$  mieściła się także w  $b$  jako taka, toby się dało całe zrównanie, a więc odpowiadająca mu kongruencyja przez tę liczbę jako spólnym czynnikiem podzielić.

Np.

$$8x \equiv -12_{(60)}.$$

Widzimy tutaj, że liczby 8 i 60 mają spólną miarę i to największą 4, zatem otrzymamy

$$2x \equiv -3_{(15)},$$

która to kongruencyja po uporządkowaniu przejdzie w następującą

$$x \equiv 6_{(15)}.$$

W dalszym ciągu będziemy brali na uwagę takie kongruencyje, w których  $a$  i  $m$  są liczbami względnie pierwszymi.

3. Aby daną kongruencyją

$$ax \equiv b_{(m)}$$

rozwiązać w liczbach całkowitych, gdy  $a$  i  $m$  są niespółmierne, mamy dwie drogi

a) użycie twierdzeń o kongruencyi liczb powyżej podanych w §§. 2 i 3;

b) użycie ułamków ciągłych.

4. Porządkując kongruencyją na podstawie znanych twierdzeń, dojdziemy zawsze do kongruencyi następującej postaci

$$x \equiv d_{(m)},$$



z której wypływa zrównanie

$$x = mt + d,$$

gdzie  $t$  oznacza jakąkolwiek całkowitą liczbę albo dodatnią albo też ujemną, nawet  $= 0$ . Podstawiając w ostatniem zrównaniu za  $t$  wartości powyżej określone, otrzymamy cały szereg odpowiednich wartości na  $x$ .

Kongruencja  $ax \equiv b_{(m)}$  jest rozwiązana, skoro przybierze postać

$$x \equiv d_{(m)},$$

skoro zatem współczynnik niewiadomej jest  $+1$ .

5. Następujące przykłady okażą sposób rozwiązywania kongruencji na podstawie znanych twierdzeń.

$$\begin{array}{r} 1. \qquad 5x \equiv 7_{(3)} \\ \hline 5x - 3x \equiv 7 - 3 \\ 2x \equiv 4 \\ x \equiv 2 \\ \hline x = 2 + 3t \end{array}$$

gdzie  $t = -\infty, \dots, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots, +\infty$

|           |       |                     |               |                |
|-----------|-------|---------------------|---------------|----------------|
| Dla $t=0$ | $x=2$ | $10 \equiv 7_{(3)}$ | $10 - 7 = 3$  | $3 : 3 = 1.$   |
| $t=1$     | $x=5$ | $25 \equiv 7_{(3)}$ | $25 - 7 = 18$ | $18 : 3 = 6.$  |
| $t=2$     | $x=8$ | $40 \equiv 7_{(3)}$ | $40 - 7 = 33$ | $33 : 3 = 11.$ |
| .....     | ..... | .....               | .....         | .....          |
| .....     | ..... | .....               | .....         | .....          |

$$\begin{array}{r} 2. \qquad 75x \equiv 84_{(63)} \\ \hline 25x \equiv 28_{(21)} \\ 25x - 21x \equiv 28 \\ 4x \equiv 28 \\ x \equiv 7_{(21)} \\ \hline x = 7 + 21 \cdot t \end{array}$$

|        |         |                         |                    |                   |
|--------|---------|-------------------------|--------------------|-------------------|
| $t=0$  | $x=7$   | $175 - 28_{(21)}$       | $175 - 28 = 147$   | $147 : 21 = 7$    |
| $t=-1$ | $x=-14$ | $-350 \equiv 28_{(21)}$ | $-350 - 28 = -378$ | $-378 : 21 = -18$ |
| .....  | .....   | .....                   | .....              | .....             |
| .....  | .....   | .....                   | .....              | .....             |



$$\begin{array}{r}
 3. \quad 21x \equiv -27_{(17)} \\
 \hline
 21x - 17x \equiv -27 + 17 \\
 4x \equiv -10 \\
 2x \equiv -5 \\
 2x \equiv -5 + 17 \\
 2x \equiv 12 \\
 x \equiv 6_{(17)} \\
 \hline
 x = 6 + 17t
 \end{array}$$

|      |       |                            |                  |               |
|------|-------|----------------------------|------------------|---------------|
| t=0  | x=6   | 126 ≡ -27 <sub>(17)</sub>  | 126 + 27 = 153   | 153:17 = 9    |
| t=-1 | x=-11 | -231 ≡ -27 <sub>(17)</sub> | -231 + 27 = -204 | -204:17 = -12 |
| t=+1 | x=23  | 483 ≡ -27 <sub>(17)</sub>  | 483 + 27 = 510   | 510:17 = 30   |
| .... | ....  | ....                       | ....             | ....          |
| .... | ....  | ....                       | ....             | ....          |

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 36x \equiv 55_{(13)} \\
 \hline
 36x - 39x \equiv 55 - 52 \\
 -3x \equiv 3 \\
 x \equiv -1_{(13)} \\
 \hline
 x = 13t - 1
 \end{array}$$

|      |      |                          |                |               |
|------|------|--------------------------|----------------|---------------|
| t=0  | x=-1 | -36 ≡ 55 <sub>(13)</sub> | -36 - 55 = -91 | -91 : 13 = -7 |
| t=1  | x=12 | 432 ≡ 55 <sub>(13)</sub> | 432 - 55 = 377 | 377 : 13 = 29 |
| t=2  | x=25 | 900 ≡ 55 <sub>(13)</sub> | 900 - 55 = 845 | 845 : 13 = 65 |
| .... | .... | ....                     | ....           | ....          |
| .... | .... | ....                     | ....           | ....          |

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 17x \equiv 32_{(56)} \\
 \hline
 17x - 56x \equiv 32 - 56 \\
 39x \equiv 24 \\
 13x \equiv 8 \\
 13x \equiv 8 - 2.56 \\
 13x \equiv -104 \\
 x \equiv -8_{(56)} \\
 \hline
 x = 56t - 8
 \end{array}$$

|      |      |                           |                  |                |
|------|------|---------------------------|------------------|----------------|
| t=0  | x=-8 | -136 ≡ 32 <sub>(56)</sub> | -136 - 32 = -168 | -168 : 56 = -3 |
| t=1  | x=48 | 816 ≡ 32 <sub>(56)</sub>  | 816 - 32 = 784   | 784 : 56 = 14  |
| .... | .... | ....                      | ....             | ....           |
| .... | .... | ....                      | ....             | ....           |



$$\begin{array}{rcl}
6. & 139x \equiv 2070_{(21)} & \\
\hline
& 139x - 21.6x \equiv 2070 - 99.21 & \\
& 139x - 126x \equiv 2070 - 2079 & \\
& 13x \equiv -9 & \\
& 13x - 21x \equiv -9 + 21 & \\
& \quad -8x \equiv 12 & \\
& \quad 2x \equiv -3 & \\
& \quad 2x \equiv -3 + 21 & \\
& \quad 2x \equiv 18 & \\
& \quad x \equiv 9_{(21)} & \\
\hline
& x = 9 + 21t & \\
& t = 0, \quad x = 9 & \\
& t = -1, \quad x = 12 & \\
& t = +1, \quad x = 30 & \\
& \dots\dots\dots & \\
& \dots\dots\dots &
\end{array}$$

U w a g a. Przytoczone przykłady przekonują nas, że w większej części przypadków potrzeba tylko wprawy i nieco bystrości umysłu, aby na podstawie znanych twierdzeń każdą daną kongruencyją rozwiązać. Rzadko atoli się wydarza, aby rozwiązujący był zmuszony szukać innych dróg lub fortelów przy rozwiązywaniu tychże. Gdy liczby  $a$  i  $m$  są bardzo wielkie, co w praktyce rzadko przychodzi, to w takim razie udajemy się do następującego sposobu rozwiązywania kongruencyj.

Gdy  $a$  i  $m$  są wielkimi liczbami, to sprowadzamy nasamprzód kongruencyją do najmniejszych dodatnich rezyduów. Niech będzie zatem dana kongruencyja

$$ax \equiv b_{(m)} \dots\dots\dots (1)$$

posiadającą najmniejsze dodatnie rezydual. W takim razie być musi

$$mx \equiv 0_{(m)} \dots\dots\dots (2)$$

Dzielnik moduł  $m$  liczbą  $a$ , otrzymujemy iloraz  $q$ ; pozostającą resztę z podzielenia oznaczmy przez  $r$ ; więc

$$\frac{m}{a} = q + \frac{r}{a}$$



czyli

$$m - aq = r.$$

Otrzymanym ilorazem  $q$  pomnożywszy daną kongruencyą (1) i odjawszy ją od równania (2), mieć będziemy

$$rx = - bq_{(m)} \dots \dots \dots (3)$$

Dzieląc poprzedni dzielnik  $a$  przez resztę  $r$ , otrzymamy

$$\frac{a}{r} = q' + \frac{r'}{r}$$

czyli

$$a - rq' = r'.$$

Pomnożywszy nowym ilorazem  $q'$  kongruencyą (3) i odjawszy ją od (2), otrzymamy

$$r'x \equiv b - b'q'$$

czyli

$$r'x \equiv b''.$$

Postępując tym sposobem dalej, dochodzimy w końcu do kongruencyi następującej postaci:

$$x \equiv d_{(m)},$$

gdzie

$$r^{(n)} = 1,$$

skąd wypływa równanie

$$x = mt + d.$$

Tego rodzaju kongruencyje przychodzą w praktyce bardzo rzadko. Ten atoli sposób ich rozwiązania niekoniecznie należy przeprowadzać do samego końca, gdyż wśród rachunku można często zastosować znane nam twierdzenia, które szybko do rozwiązania kongruencyi doprowadzą. Następujące przykłady objaśnią tę rzecz wybitniej.

$$1. \quad 17x \equiv 32_{(56)} \dots \dots \dots (1)$$

Jestto kongruencyja przedstawiona w najmniejszych rezyduach dodatnich. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} 56x &\equiv 0_{(56)}, \\ \frac{56}{17} &= 3 + \frac{5}{17}. \end{aligned}$$



Przez iloraz 3 mnożymy kongruencyją (1) i odejmujemy od kongruencji (2):

$$(56 - 51) x \equiv -96$$

$$5x \equiv -96$$

$$5x \equiv -96 + 56$$

$$5x \equiv -40$$

$$x \equiv -8$$

---


$$x = 56t - 8 \text{ (Ob. str. 26, przykł. 5.)}$$

2.  $139x \equiv 2070_{(21)}$

---


$$139x - 21 \cdot 6 \equiv 2070 - 98 \cdot 21.$$

$$13x \equiv 12_{(21)} \dots\dots\dots (1)$$

$$21x \equiv 0_{(21)} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{21}{13} = 1 + \frac{8}{13}.$$

Mnożąc (1) przez 1 i odejmując od (2), będzie

$$(21 - 13) x \equiv -12$$

$$8x \equiv -12$$

$$2x \equiv -3 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}.$$

Przez 6 mnożymy kongruencyją (4) i odejmujemy od (1):

$$(13 - 12) x \equiv 12 + 18$$

$$x \equiv 30$$

$$x \equiv 9$$

---


$$x = 9 + 21t \text{ (Ob. str. 27, przykł. 6.)}$$

### Przykłady.

1.  $4x \equiv 5_{(3)}.$

2.  $11x \equiv 17_{(5)}.$

3.  $17x \equiv 29_{(13)}.$

4.  $25x - 16 \equiv 23_{(7)}.$

5.  $38x \equiv 13_{(49)}.$

6.  $112x \equiv 7080_{(25)}.$

7.  $131x \equiv 98_{(86)}.$

8.  $237x \equiv 419_{(179)}.$



9.  $302x \equiv 507_{(25)}$ .  
 10.  $3371x \equiv -1_{(814)}$ .  
 11.  $5673x \equiv 2340_{(49)}$ .

3. Jeżeli współczynnik  $a$  liczby niewiadomej  $x$  danej kongruencji

$$ax \equiv b_{(m)}$$

składa się z czynników potęg liczb 2, 3, 5 (np.  $75 = 5^2 \cdot 3$ ;  $36 = 2^2 \cdot 3^2$  i t. d.), to przy rozwiązaniu takiej kongruencji postępujemy sobie tak, iż daną kongruencją tak przekształcamy powiększaniem rezydium  $b$  o pewną wielokrotność modułu, aby liczba  $b$  wraz z liczbą  $a$  otrzymała na wspólną miarę jeden z namienionych czynników, w skutek czego możemy uprościć kongruencją. Postępując tym trybem, otrzymamy wreszcie kongruencją

$$x \equiv d_{(m)}.$$

Następujące przykłady objaśnia tę rzecz bliżej.

1.  $75x \equiv 83_{(62)}$ .

Sprowadzamy tę daną kongruencją do najmniejszych rezydów dodatnich, dodając do 83 moduł raz; otrzymamy więc

$$75x \equiv 145,$$

$$15x \equiv 29.$$

Odjawszy od 29 moduł raz, mieć będziemy

$$15x \equiv -33,$$

$$5x \equiv -11;$$

dodawszy do drugiej strony moduł trzy razy, uzyskamy

$$x \equiv 35_{(62)},$$

zatem

$$x = 62t + 35.$$

Dla  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  wypada  $x = 35, 97, 159, 221, \dots$

*Próba.* Dla  $x = 35$  wypada

$$75 \cdot 35 \equiv 83_{(62)}$$

$$2625 \equiv 83$$

$$2625 - 83 = 2542$$

$$2542 : 62 = 41.$$



$$2. \quad 36x \equiv 55_{(78)}.$$

Dodajmy do 55 moduł raz:

$$36x \equiv 134,$$

$$18x \equiv 67;$$

odciągnijmy od 67 moduł raz:

$$18x \equiv -12,$$

$$3x \equiv -2;$$

dodawszy wreszcie moduł dwa razy do  $-2$ , otrzymamy:

$$3x \equiv 156,$$

$$x \equiv 52_{(79)},$$

zatem

$$x = 79t + 52.$$

Dla  $t = 0, 1, 2, \dots$  wypada  $x = 52, 131, 210, \dots$

*Próba.* Dla  $x = 210$  będzie

$$36 \cdot 210 \equiv 55_{(79)},$$

$$7560 \equiv 55_{(79)},$$

$$7560 - 55 = 7505.$$

$$7505 : 79 = 95.$$

## §. 5.

### Rozwiązywanie kongruencji zapomocą ułamków ciągłych.

Sposób rozwiązywania kongruencji zapomocą ułamków ciągłych podał słynny matematyk LAGRANGE, a GAUSS idąc za nim, polecił metodę jego jako dobrą, i taż metoda w nowszych dziełach matematycznych z upodobaniem jest podawana. Nawet Dr. SCHWARZ, profesor szkoły pedagogicznej w Halle przemawia gorąco za tą metodą. Co do mnie atoli stanowczo temu sprzeciwić się muszę; będąc bowiem miłośnikiem prostoty w rachowaniu i trzymając się téj zasady: „Im króćcéj i prościéj, tym lepiéj“, uważam rozwiązywanie kongruencji zapomocą ułamków łańcuchowych za daleko żmudniejsze i wiele czasu zużywające.



Na dowód, iż zapatrywanie moje jest w zupełności słuszne, rozwiążę kilka przykładów tak zapomocą ułamków ciągłych, jak zapomocą poznanych twierdzeń kongruencyjnych.

Niech będzie daną kongruencyja

$$ax \equiv 1_{(m)},$$

którą mamy rozwiązać. Zakładamy, że  $a$  i  $m$  są względem siebie liczbami pierwszymi. W tym celu rozwijamy ułamek  $\frac{a}{m}$  w ułamek ciągły i wyznaczamy przybliżone jego wartości. Niech będzie  $\frac{L}{M}$  przedostatnią przybliżoną wartością, to w takim razie zachodzi względność:

$$Lm - aM = (-1)^n,$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę wyrazów ułamka ciągłego.

Zakładam, że  $\frac{a}{m}$  jest właściwym ułamkiem, a to zawsze spełnia się wtedy, gdy kongruencyją wyrazimy w najmniejszych dodatnich rezyduach.

Z powyższego zrównania wynika kongruencyja

$$-aM \equiv (-1)_{(m)}^n,$$

czyli

$$aM \equiv (-1)_{(m)}^{n+1}.$$

Z porównania téj kongruencyi z kongruencyją mającą się rozwiązać wynika

$$x \equiv (-1)^{n+1} M.$$

Zrównanie to daje częściowe rozwiązanie kongruencyi. Ogólne zaś rozwiązanie osiągniemy bez żadnych trudności; otrzymujemy bowiem

$$x \equiv (-1)^{n+1} M$$

dla jakiegokolwiek modułu, przeto też

$$x \equiv (-1)^{n+1} M_{(m)},$$

więc

$$x = (-1)^{n+1} M + mt,$$

które to zrównanie daje nam ogólne rozwiązanie danéj kongruencyi.

Kongruencyje mające się rozwiązać mają zazwyczaj postać

$$ax \equiv b_{(m)},$$



a rozwiązanie téj postaci sprowadza się do rozwiązania kongruencji

$$ax \equiv 1_{(m)}.$$

Zamieniamy przeto  $\frac{a}{m}$  w ułamek ciągły i wyznaczwszy przybliżone jego wartości, otrzymamy jak poprzednio:

$$Lm - aM = (-1)^n,$$

a stąd rozmnożywszy przez  $b$

$$Lmb - aMb = (-1)^n b,$$

skąd wypływa kongruencja

$$- aMb \equiv (-1)^n b_{(m)}$$

czyli

$$aMb \equiv (-1)^{n+1} b_{(m)}.$$

Częściowe rozwiązanie otrzymujemy z porównania téj kongruencji z daną, a więc

$$x = (-1)^{n+1} bM,$$

a ogólne daje nam zrównanie

$$x = (-1)^{n+1} bM + mt.$$

### Przykłady.

$$1. \quad 5673x \equiv 2340_{(49)}.$$

Wyrażamy tę kongruencję w najmniejszych dodatnich reszduach

$$38x \equiv 13_{(49)},$$

$$\frac{38}{49} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}}$$

a przybliżone jego wartości są:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{38}{49};$$

przeto

$$x = (1 - )^5. 13.9 + 49t$$

$$x = - 117 + 49t.$$

Dr. SCHWARZ (*Die Elemente der Zahlentheorie*) rozwiązuje następujące dwie kongruencje

$$237x \equiv 419_{(179)},$$

$$- 131x \equiv 98_{(86)},$$



nie sprowadzając ich wcale do najmniejszych dodatnich rezyduów; skutkiem czego rachunek staje się długim i żmudnym, a wypadki zjawiają się w wielkich liczbach.

Aby wykazać dogodność naszej metody, rozwiążemy te przykłady obiema metodami.

*Przykład pierwszy.* a) Nie sprowadzając kongruencji do najmniejszych rezyduów dodatnich. Ułomek  $\frac{237}{179}$  rozwijamy na ułomek ciągły.

$$\begin{array}{r|l|l} 237 & 179 & 1 \\ 58 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & & 1 \\ & & 1 \\ & & 2 \end{array} \quad \frac{237}{179} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

Przybliżone wartości:

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{45}{34}, \frac{49}{37}, \frac{94}{71}, \frac{237}{179}.$$

Ponieważ  $\frac{237}{179}$  jest niewłaściwym ułamkiem, przeto częściowe rozwiązanie przedstawia nam zrównanie:

$$x = (-1)^6 \cdot 71 \cdot 419,$$

a ogólne

$$x = (-1)^6 \cdot 71 \cdot 419 + 179t$$

czyli

$$x = 29749 + 179t,$$

albo gdy podstawimy

$$t = t' - 166,$$

otrzymamy

$$x = 35 + 179t'.$$

b) Sprowadzając powyższą kongruencję do najmniejszych liczb dodatnich, będziemy mieli

$$58x \equiv 61_{(179)},$$

następnie otrzymujemy:

$$\frac{58}{179} = \frac{1}{3 + \frac{1}{11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$



Przybliżone wartości:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{11}{34}$ ,  $\frac{12}{37}$ ,  $\frac{23}{71}$ ,  $\frac{58}{179}$ .

Podług tego

$$x = (-1)^6 \cdot 71 \cdot 61 + 179t$$

$$x = 9331 + 179t$$

$$x = 35 + 179t',$$

gdy

$$t = t' - 24 \text{ podstawiny.}$$

c) W końcu rozwiążemy powyższą kongruencyją na podstawie twierdzeń o kongruencyjach:

$$237x \equiv 419_{(179)}$$

$$58x \equiv 61_{(179)},$$

$$179x \equiv 0_{(179)},$$

$$\frac{179}{58} = 3 + \frac{5}{8},$$

$$(179 - 174)x \equiv -183,$$

$$5x \equiv -183,$$

$$5x \equiv -183 + 358,$$

$$5x \equiv 175,$$

$$x \equiv 35_{(179)},$$

$$x = 35 + 179t.$$

*Przykład drugi.* a) Za użyciem ułamków ciągłych.

$$161x \equiv 98_{(86)}$$

czyli

$$45x \equiv 12_{(86)},$$

$$\frac{45}{86} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{4}}}}$$

Przybliżone wartości:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{11}{21}, \frac{45}{86}.$$

Przeto częściowe rozwiązanie

$$x = (-1)^5 \cdot 21 \cdot 98,$$

a ogólne

$$x = (-1)^5 \cdot 21 \cdot 98 + 86t$$

czyli

$$x = -2058 + 86t,$$



czyli gdy  $t = t' + 24$  podstawimy,  
 $x = 6 + 86t'$ .

b) Na podstawie twierdzeń o kongruencyjach liczb:

$$\begin{array}{r}
 131x \equiv 98_{(86)}, \\
 \hline
 45x \equiv 12_{(86)}, \\
 15x \equiv 4_{(86)}, \\
 15x \equiv 90 \\
 x \equiv 6_{(86)}, \\
 \hline
 x = 6 + 86t.
 \end{array}$$

Powyższe rozwiązania pouczają nas, że daleko łatwiej, szybciej i dogodniej rozwiązywać kongruencyje według twierdzeń poznanych w §§. 2 i 3, aniżeli zapomocą ułamków ciągłych, chociażbyśmy nawet kongruencyją sprowadzili do najmniejszych rezyduów dodatnich.

## §. 6.

### Rozwiązanie równań nieoznaczonych stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

1. Jeżeli liczba równań ułożonych z warunków danego zagadnienia jest mniejszą niż liczba niewiadomych, wchodzących w skład zagadnienia, to ciągłym rugowaniem niewiadomych dojdziemy w końcu do jednego równania z dwiema albo z kilku niewiadomymi. Chcąc otrzymać z tegoż równania wartość jedną z niewiadomych, potrzeba dla wszystkich innych przyjąć dowolne wartości. Ponieważ takich wartości może być nieskończenie wiele, przeto otrzymamy nieskończoną liczbę wartości dla pierwszej niewiadomej. Takie więc równania z dwiema lub kilku niewiadomymi zowią się nieoznaczonemi albo dyjofantycznemi, gdyż *DYJOFANTES*, sławny w starożytności matematyk, zajmował się podobnemi zagadnieniami.



Zwyczajnie atoli przy rozwiązywaniu tych zrównań żądamy, aby wartości niewiadomych czyniły zadość pewnym, z góry założonym warunkom, jak np. aby były liczbami całkowitemi albo też dodatnimi, albo w końcu całkowitemi i dodatnimi.

2. Niech będzie

$$ax + by = c$$

zrównaniem nieoznaczoném przywiedzioném do najprostszéj postaci, gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  przedstawiają liczby całkowite, dodatnie albo też ujemne, jakoteż gdzie liczby  $a$  i  $b$  są niespółmierne, bo w przeciwnym razie dałaby się liczba  $c$  przez spólną ich miarę uprościć.

Założmy, że

$$a > b$$

i przyjmijmy  $b$  za moduł; otrzymamy więc następującą kongruencyją

$$ax \equiv c_{(b)},$$

z której wiadomym sposobem uzyskamy zrównanie

$$x = bt + d.$$

Podstawivszy tę wartość w dane zrównanie, otrzymamy

$$y = -at + \frac{c - ad}{b}$$

czyli króćej

$$y = -at + f.$$

Podstawiając odpowiednie wartości za  $t$  stosownie do tego czy  $x$  i  $y$  mają być liczbami całkowitemi, czy też całkowitemi i dodatnimi, otrzymamy na  $x$  i  $y$  dwa szeregi wartości, z których każde dwie sobie przynależne tworzą jedno rozwiązanie zrównania.

Przy zamianie zrównania na kongruencyją bierze się po największej części mniejszy spółczynnik niewiadomej za moduł, gdyż rachunek staje się łatwiejszym.

### Przykłady.

1. Z zrównania:

$$4x - 7y = 75$$



wyływa kongruencyja

$$- 7y \equiv 75_{(4)},$$

która uporządkowana daje

$$y \equiv 3_{(4)},$$

zatem

$$y = 4t + 3.$$

Podstawivszy tę wartość w dane zrównanie, mieć będziemy drugą wartość

$$x = 7t + 24.$$

Chcąc przeto na  $x$  i  $y$  otrzymać wartości całkowite i dodatnie, przyjmimy  $t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10, \dots$ , przeto otrzymamy dla  $x = 24, 31, 38, 45, 52, \dots, 94, \dots$ ; dla  $y = 3, 7, 11, 15, 19, \dots, 43, \dots$  czyli

|   |    |    |    |    |    |       |    |       |
|---|----|----|----|----|----|-------|----|-------|
| t | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | ..... | 10 | ..... |
| x | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | ..... | 94 | ..... |
| y | 3  | 7  | 11 | 15 | 19 | ..... | 43 | ..... |

2. Z danego zrównania

$$105x - 43y = 17$$

wyływa kongruencyja

$$105x \equiv 17_{(43)},$$

co porządkując otrzymamy

$$- 24x \equiv 60,$$

$$2x \equiv - 5,$$

$$2x \equiv 38,$$

$$x \equiv 19_{(43)},$$

więc

$$x = 43t + 19,$$

$$y = 105t + 46,$$

zatem otrzymamy

|   |    |     |     |     |     |     |      |
|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| t | 0  | 1   | 2   | 3   | 4   | 9   | 10   |
| x | 19 | 62  | 105 | 148 | 191 | 406 | 449  |
| y | 46 | 151 | 256 | 361 | 466 | 991 | 1096 |



3. Rozwiązać równanie  $x^2 - 4y^2 = x + 2y$  w liczbach całkowitych i dodatnich.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4y^2 = x + 2y, \\
 \hline
 (x + 2y)(x - 2y) = x + 2y, \\
 x - 2y = 1, \\
 x \equiv 1_{(2)}, \\
 \hline
 x = 1 + 2t, \\
 y = t,
 \end{array}$$

więc

|   |   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|----|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| x | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |

4. Które liczby podzielone przez 12 dają resztę 7, a podzielone przez 15 resztę 4?

$$\begin{array}{l}
 L = 12x + 7 = 15y + 4 \\
 4x - 5y = -1,
 \end{array}$$

zatem kongruencyja

$$\begin{array}{l}
 5y \equiv 1_{(4)}, \\
 y \equiv 1,
 \end{array}$$

więc

$$\begin{array}{l}
 y = 1 + 4t, \\
 x = 5t + 1,
 \end{array}$$

przeto

$$L = 60t + 19,$$

|   |    |    |     |     |     |     |
|---|----|----|-----|-----|-----|-----|
| t | 0  | 1  | 2   | 3   | 6   | 10  |
| L | 19 | 79 | 139 | 199 | 379 | 619 |

5. Wynaaleść dwie liczby (całkowite i dodatnie), iżby suma z 8 krotną pierwszą i 5 krotną drugą czyniła 91.

$$\begin{array}{l}
 8x + 3y = 91, \\
 8x \equiv 91_{(3)}, \\
 8x \equiv 16, \\
 x \equiv 2_{(3)},
 \end{array}$$



przeto

$$\begin{aligned}x &= 3t + 2, \\y &= -8t + 25,\end{aligned}$$

zatem

|   |    |    |   |    |
|---|----|----|---|----|
| t | 0  | 1  | 2 | 3  |
| x | 2  | 5  | 8 | 11 |
| y | 25 | 17 | 9 | 1  |

Dla  $t = 4$  wypada odjemna wartość na  $y$ .

6. Między 1000 a 2000 są takie liczby, które powiększone o 5 są podzielne przez 13, a pomniejszone o 5 są podzielne przez 17. Szukajmy tych liczb.

$$\frac{L+5}{13} = x, \quad \frac{L-5}{17} = y,$$

przeto

$$13x - 17y = 10,$$

zatem kongruencyja

$$-17y \equiv 10_{(13)},$$

$$9y \equiv 36,$$

$$y \equiv 4_{(13)},$$

więc

$$y = 4 + 13t,$$

$$x = 6 + 17t,$$

przeto

$$L = 73 + 221t$$

|   |      |      |      |      |
|---|------|------|------|------|
| t | 5    | 6    | 7    | 8    |
| L | 1178 | 1399 | 1620 | 1841 |

Żądanymi liczbami są 1178, 1399, 1620, 1841.

7. Uczeń otrzymywał po 10 centów za każde piśmienne wypracowanie bez omyłek, a płacił po 7 centów za takie wypracowanie, w którym wytknięto mu pomyłki. W końcu półroczu miał tylko 5 centów zysku. Ileż wypracowań było wolnych od pomyłek, a ileż było z pomyłkami?



$$10x - 7y = 5,$$

$$10x \equiv 5_{(7)},$$

$$2x \equiv 1,$$

$$2x \equiv 8,$$

$$x \equiv 4_{(7)},$$

więc

$$x = 4 + 7t,$$

$$y = 5 + 10t,$$

|   |   |    |    |    |    |     |     |       |
|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-------|
| t | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 10  | 15  | ..... |
| x | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 74  | 109 | ..... |
| y | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 105 | 155 | ..... |

gdzie  $x$  oznacza dobre zadania, a  $y$  złe.

8. Liczbę 100 rozdzielić na takie dwie części (dodatne i całkowite), aby jedna z nich podzielona przez 7 dała resztę 4, a druga przez 5 dała resztę 2. Jakież to są te części?

$$a + b = 100,$$

$$a = 7x + 4,$$

$$b = 5y + 2,$$

przeto

$$7x + 5y = 94,$$

zatem kongruencja

$$7x \equiv 94_{(5)},$$

$$2x \equiv 4,$$

$$x \equiv 2_{(5)},$$

przeto

$$x = 2 + 5t,$$

$$y = 16 - 7t,$$

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| t | 0  | 1  | 2  |
| x | 2  | 7  | 12 |
| y | 16 | 9  | 2  |
| a | 18 | 53 | 88 |
| b | 82 | 47 | 12 |



Dla  $t = 3$  wypadają na  $y$ , więc téż i na  $b$  odjemne wartości. Żadanemi częściami 100 są 18 i 32, 53 i 47, 88 i 12.

9. Ojciec posłał syna swego do sklepu, aby za 1 zhr. kupił pióra gęsie, stalowe i ołówki, razem 200 sztuk; 3 pióra gęsie kosztują centa, 2 ołówki 5 centów, a pióra stalowe po cencie. Ileż sztuk każdego przyniesie?

$$a) \quad x + y + z = 200,$$

$$b) \quad \frac{x}{3} + y + \frac{5}{2}z = 100,$$

czyli

$$b) \quad 2x + 6y + 15z = 600.$$

Pomnożywszy zrównanie  $a)$  przez 2 i odjąwszy od  $b)$ , otrzymamy

$$c) \quad 4y + 13z = 200,$$

zatem kongruencja

$$13z \equiv 200_{(4)},$$

$$z \equiv 0_{(4)},$$

więc

$$z = 4t,$$

$$y = 50 - 13t,$$

$$x = 150 + 9t.$$

| t | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 150 | 159 | 168 | 177 | 186 |
| y | 50  | 37  | 24  | 11  | — 2 |
| z | 0   | 4   | 8   | 12  | 16  |

Z tego widzimy, że tylko pod warunkiem  $t = 1, 2, 3$  otrzymamy odpowiednie wartości na niewiadome, czyniące zadosyć powyższemu zagadnieniu.

10. Dwie przekupki mają razem 100 jaj. Pierwsza mówi: „gdy liczę moje jaja po 8, zostaje mi zawsze 7 jaj“; druga zaś mówi: „gdy rachuję moje jaja po 10, zostaje mi zawsze 7 jaj“. Ile jaj ma każda z nich?

$$a + b = 100,$$

$$(8x + 7) + (10y + 7) = 100,$$



$$8x + 10y = 86,$$

$$4x + 5y = 43;$$

zatem kongruencja

$$4x \equiv 43_{(5)},$$

$$4x \equiv 3,$$

$$4x \equiv 8,$$

$$x \equiv 2_{(5)};$$

przeto mamy

$$x = 2 + 5t,$$

$$y = 7 - 4t;$$

|   |    |    |       |
|---|----|----|-------|
| t | 0  | 1  | ..... |
| x | 2  | 7  | ..... |
| y | 7  | 3  | ..... |
| a | 23 | 63 | ..... |
| b | 77 | 37 | ..... |

Dla  $t = 2$  wypadają na  $y$ , więc też i na  $b$  odjemne wartości. Dwa zatem rozwiązania ma to zagadnienie w liczbach całkowitych i dodatnich.

11. Pewien szlachcic kupił na targu konie i woły, razem za 1770 talarów. Konia płacił po 31 talarów, wołu zaś po 21 tal. Ileż było koni i wołów?

$$31x + 21y = 1770,$$

zatem kongruencja

$$31x \equiv 1770_{(21)},$$

$$10x \equiv 6,$$

$$5x \equiv 3,$$

$$5x \equiv 45,$$

$$x \equiv 9_{(21)};$$

więc mamy

$$x = 9 + 21t,$$

$$y = 71 - 31t;$$



|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| t | 0  | 1  | 2  |
| x | 9  | 30 | 51 |
| y | 71 | 40 | 9  |

Dla  $t = 3$  wypada odjemna wartość na  $y$ .

12. Towarzystwo składające się z mężczyzn i pań znajduje się na obiedzie w restauracyi. Każdy mężczyzna przejadł 25 złr., a każda pani 16 złr.; w końcu okazało się, że panie przejadły razem 1 złr. więcej, aniżeli mężczyźni. Ile było mężczyzn, a ile pań?

$$\begin{aligned}
 25x + 1 &= 16y, \\
 25x - 16y &= -1, \\
 25x &= -1_{(16)}, \\
 9x &= 15, \\
 3x &= 5, \\
 3x &= 21, \\
 x &= 7_{(16)};
 \end{aligned}$$

więc mamy

$$\begin{aligned}
 x &= 16t + 7, \\
 y &= 25t + 11;
 \end{aligned}$$

|   |    |    |    |    |     |     |     |     |
|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| t | 0  | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   |
| x | 7  | 23 | 39 | 55 | 71  | 87  | 103 | 119 |
| y | 11 | 36 | 61 | 86 | 111 | 136 | 161 | 186 |

Podług pierwszego rozwiązania wydali mężczyźni 175 złr., panie zaś 176 złr., więc o 1 złr. więcej, niż mężczyźni.

13. Niech  $L$  oznacza pewien rok ery chrześcijańskiej, tedy reszta wypadająca z dzielenia  $\frac{L+1}{19}$  nazywa się złotą liczbą lub wrotem księżyca; reszta wypadająca z dzielenia  $\frac{L+9}{28}$  nazywa się wrotem słońca; a reszta wypadająca z dzielenia  $\frac{L+3}{15}$  zowie się poczetem rzymskim lub indykcyją rzymską. Dla którego roku ery chrześcijańskiej liczba złota = 18, wrót słońca = 12 a poczet rzymski = 7?



$$\left. \begin{aligned} \frac{L+1}{19} &= x + \frac{18}{19} \\ \frac{L+9}{28} &= y + \frac{12}{28} \\ \frac{L+3}{15} &= z + \frac{7}{15} \end{aligned} \right\} \text{czyli}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= 19x + 17 \\ L &= 28y + 3 \\ L &= 15z + 4 \end{aligned} \right\} \text{więc}$$

$$19x + 17 = 28y + 3 = 15z + 4,$$

skąd

$$a. \quad 19x - 28y = -14,$$

$$b. \quad 19x - 15z = -13;$$

zatem kongruencje

$$a. \quad 19x \equiv -14_{(28)},$$

$$b. \quad 15z \equiv 13_{(19)}.$$

Co do pierwszej kongruencji:

$$19x \equiv -14_{(28)},$$

$$75x \equiv 70,$$

$$15x \equiv 14,$$

$$15x \equiv 70,$$

$$3x \equiv 14,$$

$$3x \equiv 42,$$

$$x \equiv 14_{(28)};$$

więc mamy

$$x = 28t + 14,$$

$$y = 19t + 10,$$

$$L = 532t + 283;$$

| t | 0   | 1   | 2    | 3           | 4    |
|---|-----|-----|------|-------------|------|
| L | 283 | 815 | 1347 | <b>1879</b> | 2411 |

Co do drugiej kongruencji:

$$15z \equiv 13_{(19)},$$

$$-4z \equiv -6_{(19)},$$

$$2z \equiv 3,$$

$$2z \equiv 22,$$

$$z \equiv 11_{(19)};$$



zatem mamy

$$\begin{aligned} z &= 19t + 11, \\ x &= 15t + 8, \\ L &= 285t + 169; \end{aligned}$$

| t | 2   | 3    | 4    | 5    | 6           | 7    |
|---|-----|------|------|------|-------------|------|
| L | 739 | 1024 | 1310 | 1594 | <b>1879</b> | 2164 |

Porównawszy wypadki obecne z poprzedzającymi, widzimy, że rok 1879 jest szukany rokiem.

## § 6.

### Rozwiązywanie zrównań nieoznaczonych z trzema niewiadomymi.

1. Niech będzie dane zrównanie z trzema niewiadomymi

$$ax + by + cz = d.$$

Przy rozwiązywaniu zrównań powyższej postaci należy zważać, czy między współczynnikami  $a$ ,  $b$  i  $c$  niewiadomych  $x$ ,  $y$  i  $z$  są dwa z nich niespółmierne, czy też mają wspólną miarę. W pierwszym przypadku przyjmujemy za  $z$  dowolne, zagadnieniu odpowiednie wartości. Podstawiamy je w dane zrównanie, w skutek czego otrzymamy zrównanie nieoznaczone z dwiema niewiadomymi, które rozwiązujemy wiadomym sposobem.

W drugim zaś przypadku największą wspólną miarę dwóch współczynników niewiadomych ilości przyjmujemy za moduł; w takim razie staje się wyraz zrównania zawierający trzecią niewiadomą, tą miarą niepodzielny, zgodnym z wyrazem wiadomym danego zrównania co do tego modułu.

Rzecz tę objaśnimy przykładami.

$$\begin{aligned} 1. \quad 5x + 7y + 11z &= 37, \\ 5x + 7y &= 37 - 11z, \end{aligned}$$



$$7y \equiv 37 - 11z_{(5)},$$

$$2y \equiv 2 + 4z,$$

$$y \equiv 1 + 2z_{(5)};$$

zatem

$$y = 5t + 2z + 1,$$

$$x = 6 - 7t - 5z.$$

Wartości dodatnie i całkowite czyniące temu równaniu zadosyć, są następujące:

$$t = 0,$$

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 1.$$

$$2. \quad 45x + 18y + 25z = 341,$$

$$18y \equiv 341_{(5)},$$

$$-2y \equiv 1,$$

$$2y \equiv 4,$$

$$y \equiv 2_{(5)},$$

$$y = 5t + 2.$$

Podstawiawszy tę wynalezioną wartość na  $y$  w dane równanie, otrzymamy

$$9x + 18t + 5z = 61,$$

$$5z \equiv 61_{(9)},$$

$$14z \equiv 70,$$

$$2z \equiv 10,$$

$$z \equiv 5_{(9)},$$

$$z = 9u + 5,$$

$$x = 4 - 2t - 5u.$$

Zatem wartości całkowite i dodatnie są:

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| t | 0 | 1 | 2  |
| u | 0 | 0 | 0  |
| x | 4 | 2 | 0  |
| y | 2 | 7 | 12 |
| z | 5 | 5 | 5  |

W daném powyższém równaniu

$$45x + 18y + 25z = 341$$



można także 9 spólną miarę wyrazów  $45x$  i  $18y$  przyjąć za moduł; zatem

$$\begin{aligned} 25z &\equiv 341_{(9)}, \\ -2z &\equiv -1, \\ 2z &\equiv 10, \\ z &\equiv 5_{(9)}, \\ z &= 9t + 5. \end{aligned}$$

Podstawivszy tę wartość w dane zrównanie, otrzymamy

$$5x + 2y + 25t = 24,$$

$$2y \equiv 24_{(5)},$$

$$y \equiv 12,$$

$$y \equiv 2_{(5)},$$

$$y = 5u + 2,$$

$$x = 4 - 2u - 5t;$$

zatem wartości całkowite i dodatnie są

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| t | 0 | 0 | 0  |
| u | 0 | 1 | 2  |
| x | 4 | 2 | 0  |
| y | 2 | 7 | 12 |
| z | 5 | 5 | 5  |

$$3. \quad 9x + 5y + 3z = 105,$$

$$5y \equiv 105_{(3)},$$

$$y \equiv 21,$$

$$y \equiv 0,$$

$$y = 3t.$$

Podstawivszy tę znalezioną wartość w dane zrównanie, otrzymamy

$$3x + 5t + z = 35,$$

$$z \equiv 35 - 5t_{(3)},$$

$$z \equiv -1 + t,$$

$$z = 3u + t - 1,$$

$$x = 12 - 2t - u.$$

Wartości niewiadomych  $x, y, z$  całkowite, dodatnie i różne od zera są następujące:



|   |   |   |   |   |    |    |
|---|---|---|---|---|----|----|
| t | 1 | 1 | 2 | 2 | 1  | 6  |
| u | 1 | 2 | 1 | 2 | 4  | —1 |
| x | 9 | 8 | 7 | 6 | 6  | 1  |
| y | 3 | 3 | 6 | 6 | 3  | 18 |
| z | 3 | 6 | 4 | 7 | 12 | 2  |

4. Liczbę 50 rozłożyć na trzy części, któreby były podzielne kolejno przez 5, 6, 7.

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= 50, \\
 5x + 6y + 7z &= 50, \\
 5x &\equiv 50 - 7z_{(6)}, \\
 -x &\equiv 2 - z, \\
 x &\equiv z - 2_{(6)}; \\
 x &= 6t + z - 2.
 \end{aligned}$$

Następnie otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 5(6t + z - 2) + 6y + 7z &= 50, \\
 5t + y + 2z &= 10, \\
 y &= 10 - 5t - 2z.
 \end{aligned}$$

Zatém

|   |    |    |    |    |     |     |     |     |    |       |
|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|-------|
| z | 1  | 1  | 2  | 3  | 3   | 2   | 2   | 4   | 4  | ..... |
| t | 0  | 1  | 1  | 1  | 2   | 3   | 2   | —1  | 0  | ..... |
| x | —1 | 5  | 6  | 7  | 13  | 18  | 12  | 8   | 2  | ..... |
| y | 8  | 3  | 1  | —1 | —6  | —9  | —4  | —3  | 2  | ..... |
| a | —5 | 25 | 30 | 35 | 65  | 90  | 60  | 40  | 10 | ..... |
| b | 48 | 18 | 6  | —6 | —36 | —54 | —24 | —18 | 12 | ..... |
| c | 7  | 7  | 14 | 21 | 21  | 14  | 14  | 28  | 28 | ..... |



Ponieważ wartości niewiadomych  $a, b, c$  muszą być dodatnie, przeto odpadają wszystkie kolumny pionowe z odjemnymi liczbami; żądane więc wartości są następujące:

$$a = 25, 30, 10,$$

$$b = 18, 6, 12,$$

$$c = 7, 14, 28.$$

5. 30 osób, mężczyźni, kobiety i dzieci przejadają w restauracyi 50 złr. w. a. Każdy mężczyzna płaci po 3 złr., każda kobieta po 2 złr., a każde dziecko po 1 złr. Ileż było mężczyzn, kobiet i dzieci?

$$a. \quad x + y + z = 30,$$

$$b. \quad 3x + 2y + z = 50,$$

$$c. \quad 2x + y = 20;$$

$$y = 20_{(2)},$$

$$y = 0_{(2)},$$

$$y = 2t;$$

więc

$$x = 10 - t,$$

$$z = 20 - t.$$

Zatém podstawiając za  $t$  wszelkie wartości dodatnie, nie większe od 10, otrzymamy następujące rozwiązanie

| t | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  |
| y | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| z | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

Opuszczając pierwsze i ostatnie rozwiązanie mamy jeszcze 9 prawdziwych rozwiązań.

6. W mennicy znajduje się srebro 16tój, 11tój i 9tój próby; potrzebują atoli 30 grzywien srebra 12tój próby. Ileż na to wyjdzie grzywien każdego z wymienionych trzech gatunków?

$$a. \quad x + y + z = 30$$

$$b. \quad 14x + 11y + 9z = 360.$$



Pomnożywszy (a) przez 9 i odjąwszy otrzymane zrównanie od (b), otrzymamy

$$5x + 2y = 90,$$

$$2y \equiv 90_{(5)},$$

$$2y \equiv 0,$$

$$y \equiv 0_{(5)};$$

$$y = 5t;$$

$$x = 18 - 2t,$$

$$z = 12 - 3t.$$

Zatém mamy:

| t | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  |
|---|----|----|----|----|----|
| x | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 |
| y | 0  | 5  | 10 | 15 | 20 |
| z | 12 | 9  | 6  | 3  | 0  |

7. Ktoś kupił 100 łokci materyi za 100 złr. w. a., a mianowicie łokieć aksamitu za 10 złr., łokieć atlasu za 5 złr., łokieć rypsu jedwabnego za 2 złr., łokieć płótna białego cienkiego za 50 centów. Ileż łokci z każdej materyi kupił?

$$a. \quad x + y + z + v = 100,$$

$$b. \quad 10x + 5y + 2z + \frac{1}{2}v = 100$$

czyli

$$c. \quad 20x + 10y + 4z + v = 200.$$

Po odjęciu zrównania (c) od (a) otrzymamy

$$d. \quad 19x + 9y + 3z = 100,$$

$$19x \equiv 100_{(3)},$$

$$x \equiv -2_{(3)},$$

$$e. \quad x = 3t - 2.$$

Podstawmy tę wartość za  $x$  w (d); będziemy mieli

$$19t + 3y + z = 46,$$

$$z \equiv 46 - 19t_{(3)},$$



$$z \equiv -2 - t,$$

$$z \equiv 1 + 2t_{(3)},$$

$$f. \quad z = 3u + 2t + 1.$$

Podstawiając wartości (e) i (f) w (d), otrzymamy

$$g. \quad y = 15 - 7t - u$$

a po podstawieniu wartości (e), (f), (g) w (a) wypadnie

$$v = 86 + 2t - 2u.$$

Zatem mamy

$$x = 3t - 2,$$

$$y = 15 - 7t - u,$$

$$z = 3u + 2t + 1,$$

$$v = 86 + 2t - 2u.$$

Podstawiając w te równania takie szczególne wartości za  $t$  i  $u$ , aby żądane pierwiastki niewiadomych  $x, y, z$  i  $v$  były całkowite i dodatnie, otrzymamy 13 możliwych rozwiązań. I tak

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 2  | 2  | 2  |
| u | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  | -1 | 0  | 1  | -1 |
| x | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 4  | 4  | 4  |
| y | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 1  | 0  | 2  |
| z | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9  | 6  | 3  | 0  | 5  | 8  | 2  |
| v | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 90 | 88 | 92 |

Opuszczając kolumny, w których żądane pierwiastki są zerem, otrzymamy dziesięć zagadnieniu odpowiednich rozwiązań.

Przykład ten pokazuje sposób rozwiązywania równania nieoznaczonego z czterema niewiadomymi. Tym samym sposobem postępuje się ze równaniami mającymi więcej niewiadomych niż cztery.

8. W starożytnej chińskiej arytmetyce TAYEN-LEI-SZU, napisanej przez chińskiego matematyka SIH-KING r. 717, czytamy następujące zagadnienie: „Trzy beczki zawierają ryż, każda w równej ilości. Pewnej nocy wypróżnili je złodzieje



tak, iż w beczce  $A$  pozostało tylko 1  $ho$  (mała chińska miara objętości), w  $B$  11, a w  $C$  1  $ho$ . Nie wiedziano jednak, wiele ryżu było w każdej beczce, atoli mniej niż tysiąc  $ho$ . Gdy pojmano złodziejów, pierwszy zeznał, że szuflą zagarnął kilka razy z beczki  $A$  i napełnił swój worek; drugi powiedział, że w pośpiechu chwycił za drewniany trzewik i kilka razy nabrał nim z beczki  $B$ , a trzeci oświadczył, że mając pod ręką miskę, nabrał nią ryżu kilka razy z beczki  $C$ . Przypadek zrzucił, że znaleziono te trzy naczynia, któremi nabierali złodzieje ryż z beczek, i okazało się, że szufla miała 11  $ho$ , trzewik drewniany 17  $ho$ , a miska 12  $ho$ . Ile ryżu było w każdej beczce i ile ryżu ukradł każdy złodziej?

Oznaczmy objętość każdej beczki przez  $O$ ; następnie jeżeli pierwszy złodziej zaczerpał  $x$  razy z beczki  $A$ , drugi  $y$  razy z beczki  $B$ , a trzeci  $z$  razy z beczki  $C$ , to

$$O = 11x + 1 = 17y + 11 = 12z + 1.$$

Stąd wypływa

$$a. \quad 11x - 17y = 10,$$

$$b. \quad 11x - 12z = 0.$$

Z  $b$ . otrzymujemy po ułożeniu kongruencji i rozwiązaniu takowej

$$c. \quad x = 12t$$

$$d. \quad z = 11t.$$

Podstawiawszy wartości  $(c)$  i  $(d)$  w zrównanie  $(a)$ , mieć będziemy

$$e. \quad 132t = 17y + 10,$$

skąd

$$132t \equiv 10_{(17)},$$

$$- 4t \equiv 10,$$

$$2t \equiv - 5,$$

$$2t \equiv 12,$$

$$t \equiv 6_{(17)};$$

$$f. \quad t = 6 + 17u.$$

Podstawiawszy wartość  $(f)$  w  $(c)$ ,  $(d)$  i  $(e)$ , otrzymamy

$$x = 72 + 204u,$$

$$y = 46 + 132u,$$



$$z = 66 + 187u,$$

$$0 = 793 + 2244u,$$

przeto rozwiązania w liczbach całkowitych i dodatnich są możliwe tylko dla  $u = 0$  i  $u > 0$ ; i tak

| u | 0   | 1    | 2    | 3    | ..... | ..... | ..... |
|---|-----|------|------|------|-------|-------|-------|
| x | 72  | 276  | 480  | 684  | ..... | ..... | ..... |
| y | 46  | 178  | 310  | 442  | ..... | ..... | ..... |
| z | 66  | 253  | 440  | 627  | ..... | ..... | ..... |
| N | 793 | 3037 | 5281 | 7525 | ..... | ..... | ..... |

Ponieważ ryżu było w każdej beczce mniej niż 1000 ho, przeto pierwsza kolumna daje nam odpowiedź na powyższe zagadnienie. Każda beczka zawierała więc 793 ho. Pierwszy złodziej zatem ukradł 792, drugi 782, a trzeci 792 ho.





# POMYŁKI DRUKARSKIE.

Str. 5 w. 11 z góry zamiast *Zrównanie* ma być *Z zrównania*.

„ 16 „ 10 „ „  $\frac{a^m - b^m}{a = b}$  ma być  $\frac{a^m - b^m}{a - b}$ .

„ 46 „ 9 „ „ §. 6. „ „ §. 7.









# GRONO NAUCZYCIELI

## PRZY KOŃCU ROKU SZKOLNEGO.

| L. P. | Imię i nazwisko<br>Nauczyciela                                                                                              | Stopień służbowy                                | Których przed-<br>miotów uczył                                          | Tygo dn.<br>godzin |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| 1     | P. Ignacy Stawarski,                                                                                                        | dyrektor, zawiadowca księgozbioru dla młodzieży | łaciny w V a kl.                                                        | 6                  |
| 2     | P. Czesław Łoziński,                                                                                                        | profesor                                        | w II półroczu dla słabości od wykładów uwolniony                        |                    |
| 3     | P. Ignacy Gralewski, członek wydelegowany do spółdzielstwa z deputacją gimn. miejską,                                       | profesor                                        | detto                                                                   |                    |
| 4     | P. Karol Kłesk,                                                                                                             | prof., zawiadowca gabinetu przyrodniczego       | naturalnej historii z wyjątkiem I c+d kl.                               | 18                 |
| 5     | Ks. Jan Chełmecki, dr. teologii, kan. hon. diecezji krak., człon. Rady Państwa w Izbie niższej, człon. sejmiku kraj. galic. | profesor, katecheta                             | zajęty w Radzie Państwa i Sejmie krajowym                               |                    |
| 6     | P. Wojciech Rypel,                                                                                                          | profesor, gospodarz VIII klasy                  | łac. w VIII, grek. w VIII, VI b kl.                                     | 15                 |
| 7     | P. Leopold Świerż,                                                                                                          | profesor, zawiad. biblioteki nauczycielskiej.   | grek. w VII a, V a + b                                                  | 14                 |
| 8     | P. Teofil Ziemia, dr. filozofii, docent Uniw. Jagiel., czł. kom. fil. Ak. Umiej. Krakowskićj,                               | profesor, gospodarz V b kl.                     | języka polskiego w I b, V a + b, VIII i propedeutyki w VIII i VII a + b | 18                 |



| L. p. | Imię i nazwisko<br>Nauczyciela                                                                                          | Stopień służbowy                                                                                                                                                                    | Których przed-<br>miotów uczył                                            | Tygodn<br>godzin |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 9     | Ks. Stanisław Nowiński,                                                                                                 | profesor, kate-<br>cheta i exhorta-<br>tor dla klas niż-<br>szych, gospodarz<br>I b kl., zawia-<br>dowca zbioru<br>książek szkol-<br>nych dla uboż-<br>szej młodzieży<br>niż. gimn. | religii w niż-<br>szem gimna-<br>zyum.                                    | 22               |
| 10    | p. Leon Kulczyński<br>doktor filozofii,                                                                                 | profesor, gospo-<br>darz VII a kl.                                                                                                                                                  | łac. w VIIa,<br>Va, grec. VII b,<br>VIa                                   | 20               |
| 11    | P. Mieczysław Jamró-<br>giewicz, członek komi-<br>sy egzaminacyjnej dla<br>aspirantów jednorocznej<br>służby wojskowej, | profesor, zawia-<br>dowca gabinetu<br>fizycznego                                                                                                                                    | matematyki i<br>fizyki VIII,<br>VII a+b, ma-<br>tematyki w<br>VIa kl.     | 20               |
| 12    | P. Antoni Soswiński,                                                                                                    | profesor, gospo-<br>darz II b kl.                                                                                                                                                   | języka łaciń-<br>skiego w IIIb,<br>IIb, niemiec-<br>kiego w IIb<br>kl.    | 19               |
| 13    | P. August Sokołowski,<br>doktor filozofii, docent<br>Uniwers. Jagiel.,                                                  | profesor                                                                                                                                                                            | jęz. niem. w<br>VIa, hist. po-<br>wszechniej w<br>VIII, VIIa+b<br>IVa kl. | 18               |
| 14    | P. Jan Czubek,                                                                                                          | naucz., gospodarz<br>VII b kl.                                                                                                                                                      | języka łac. w<br>VIIb, VIa+b<br>kl.                                       | 17               |
| 15    | P. Jan Molin,<br>doktor filozofii,                                                                                      | nauczyciel, zawia-<br>dowca zbioru<br>książek szkol-<br>nych dla uboż-<br>szej młodzieży<br>wyższ. gimn.                                                                            | języka niemiec-<br>kiego w VIII,<br>VIIa+b, Va kl.                        | 15               |
| 16    | P. Tytus Świdorski,                                                                                                     | naucz. — gospo-<br>darz VI a kl.                                                                                                                                                    | polskiego w<br>VIIa+b, VI<br>a+b, greckie-<br>go w IIIa kl.               | 17               |
| 17    | P. Juliusz Miklaszewski                                                                                                 | naucz. — gospo-<br>darz Va kl.                                                                                                                                                      | historii po-<br>wszechniej VIa<br>+b, Va+b,<br>IVb kl.                    | 18               |



| L. p. | Imię i nazwisko<br>Nauczyciela                                                                                                                                      | Stopień służbowy                                           | Których przed-<br>miotów uczył                                           | Tygodn.<br>godzin |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| 18    | P. Władysław Froncz,                                                                                                                                                | nauczyciel — za-<br>stępca, gospodarz<br>Ic kl.            | języka łac. w<br>Ic, polskiego<br>w Ic+d, niem<br>w IIIa kl.             | 18                |
| 19    | P. Teofil Gruszkiewicz,                                                                                                                                             | n. z.<br>gospodarz IV b<br>kl.                             | języka łac.,<br>greck., polsk.<br>i niemieckiego<br>w IVb kl.            | 17                |
| 20    | P. Franciszek Znami-<br>rowski,                                                                                                                                     | n. z.<br>gospodarz Id kl.                                  | jęz. łac. w Id,<br>polsk. w IIb,<br>niem. w Vb i<br>IIIb kl.             | 18                |
| 21    | P. Michał Celowski,                                                                                                                                                 | n. z.                                                      | matematyki w<br>Vb, IIIa+b,<br>IIc, Ib+d kl.                             | 19                |
| 22    | P. Adolf Lewaj,                                                                                                                                                     | n. z.<br>gospodarz Ia kl.                                  | łac. w Ia+b,<br>polsk. Ia kl.                                            | 19                |
| 23    | P. Władysław Śluzar,                                                                                                                                                | n. z.<br>gospodarz IV a<br>kl.                             | jęz. łac., grec.,<br>polsk. i nie-<br>miec. w IVa kl.                    | 17                |
| 24    | P. Bronisław Gustawicz,<br>czł. c. k. tow. geograf.<br>w Wiedniu i politechnicz-<br>nego we Lwowie, czł. tow.<br>ochrony zwierząt w Kra-<br>kowie, Wiedniu i Gracu. | n. z.<br>zawiaadowca zbioru<br>map geograficznych          | geogr. w Ia+c,<br>matematyki w<br>VIb, fizyki w IV<br>a+b, IIIa+b<br>kl. | 19                |
| 25    | P. Ignacy Serwin,                                                                                                                                                   | n. z.                                                      | matematyki w<br>Va, IVa+b, IIb,<br>Ia+c kl.                              | 19                |
| 26    | Ksiądz Władysław<br>Głębocki,                                                                                                                                       | n. z.<br>katecheta i exhor-<br>tator w klasach<br>wyższych | religii w wyż-<br>szem gimn.                                             | 14                |
| 27    | P. Jan Janik,                                                                                                                                                       | n. z.<br>gospodarz III a kl.                               | jęz. łac., grec.,<br>polsk. w IIIa<br>i polsk. w<br>IIIb kl.             | 17                |
| 28    | P. Stanisław Świtalski                                                                                                                                              | n. z.<br>gospodarz II a<br>kl.                             | jęz. łac., polsk.<br>niem. w IIa kl.                                     | 16                |



| L. p.                                                                                            | Imię i nazwisko<br>Nauczyciela.                             | Stopień służbowy                | Których przed-<br>miotów uczył               | Tygodn.<br>godzin |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------------|-------------------|
| 29                                                                                               | P. Józef Launhardt,                                         | n. z.<br>gospodarz VI b<br>kl.  | jéz. niem. w<br>VIIb, Ib+d                   | 17                |
| 30                                                                                               | P. Michał Chyliński,<br>członek Kom. hist. Ak.<br>Um. Krak. | n. z.<br>gospodarz III b<br>kl. | hist., geogr. w<br>IIIb, IIa+b<br>+c, Ib kl. | 21                |
| 31                                                                                               | P. Zygmunt Kunstmann,                                       | n. z.<br>gospodarz II c<br>kl.  | języka polsk.,<br>łac., niem. w<br>IIc kl.   | 16                |
| 32                                                                                               | P. Stefan Remer,                                            | n. z.                           | jéz. niem. w<br>Ia+c, geogr.<br>w Id         | 15                |
| 33                                                                                               | P. Kazimierz Krzyża-<br>nowski,                             | aplikant                        | matematyki w<br>IIa kl.                      | 3                 |
| 34                                                                                               | P. Władysław Kul-<br>czyński,                               | aplikant                        | historii natu-<br>ralnej w Ic+d<br>kl.       | 4                 |
| Razem godzin obowiązkowych w tygodniu . . . . .                                                  |                                                             |                                 |                                              | 506               |
| 35                                                                                               | P. Walery Eljasz,                                           | nauczyciel nade-<br>towany      | rysunków                                     | 6                 |
| 36                                                                                               | P. Wiktor Erard<br>Ciechowski,                              | detto                           | jéz. francus-<br>kiego                       | 6                 |
| 37                                                                                               | P. Edward Mazur,<br>emeryt. c. k. kapitan,                  | detto                           | gimnastyki                                   | 6                 |
| 38                                                                                               | P. Antoni Vopalka                                           | detto                           | śpiewu                                       | 6                 |
| 39                                                                                               | P. Emil Klimek,                                             | detto                           | stenografii                                  | 2                 |
|                                                                                                  | P. August Sokołowski,                                       | jak wyżej                       | dziej. kraju<br>rodz. w VII<br>a+b, IVa kl.  | 2                 |
|                                                                                                  | P. Juliusz Miklaszew-<br>ski,                               | jak wyżej                       | dziej. kraju<br>rodz. w VIa+<br>b, IVb kl.   | 2                 |
|                                                                                                  | P. Michał Chyliński,                                        | jak wyżej                       | dziej. kraju<br>rodz. w III<br>a+b kl.       | 2                 |
|                                                                                                  | P. Władysław Froncz,                                        | jak wyżej                       | kaligrafii w II<br>a+b+c kl.                 | 2                 |
|                                                                                                  | P. Franciszek Znami-<br>rowski,                             | jak wyżej                       | kaligrafii w I<br>a+b+c+d kl.                | 2                 |
| Godzin nadobowiązkowych tygodniowo razem . . . . .                                               |                                                             |                                 |                                              | 36                |
| Ks. hr. Adam Potulicki miewał dla uczniów drugiego oddziału<br>nłz. gimn. niedzielne exhortacye. |                                                             |                                 |                                              |                   |



## ROZKŁAD NAUK.

## I. Klasa.

*Religia.* 2 godziny tygodniowo. Katechizm katolicki.

*Język łaciński.* 8 g. t. Nauka o prawidłowych formach; począwszy od grudnia, co tydzień zadanie szkolne, czasami domowe.

*Język polski.* 3 g. t. Z gramatyki odmiana rzeczownika, przymiotnika, liczebnika i zaimka; czytanie Wypisów; co 14 dni zadanie domowe lub szkolne.

*Język niemiecki.* 6 g. t. Szyk prosty i odwrotny w zdaniach pojedynczych, niezależnych. Odmiana rzeczowników, przymiotników, liczebników, zaimków; przysłówki i ich stopniowanie; zadań domowych lub szkolnych 3 na miesiąc.

*Geografia.* 3 g. t. Pojęcia wstępne z geografii fizycznej i matematycznej, oro- hydro- topografia; główne pojęcia z geografii politycznej. Ćwiczenia kartograficzne.

*Matematyka.* 3 g. t. W pierwszym półroczu tylko arytmetyka, w drugim 1 g. arytmetyki, 2 g. geometrii; częste ćwiczenia domowe, co miesiąc zadanie szkolne.

*Historia naturalna.* 2 g. t. w I. półroczu: ssaki; w II. półroczu: przywierzowce i najważniejsze kałdunowe.

## II. Klasa.

*Religia.* 2 g. t. Dzieje starego zakonu.

*Język łaciński.* 8 g. t. Odmiana form nieprawidłowych. Co tydzień zadanie szkolne, czasami domowe.

*Język polski.* 3 g. t. Z gramatyki odmiana słowa; czytanie Wypisów, ćwiczenia pisemne jak w I. klasie.

*Język niemiecki.* 5 g. t. Powtórzenie przedmiotu branego w I. klasie; czasy złożone i tryby, strona bierna, używanie



słów posilkowych „haben“ i „sein“ do tworzenia czasów przeszłych, odmiana słowa, odmiana słów zaimkowych i zwrotnych, nieprawidłowych, znaczenie trybów, używanie słówka „zu“ przed trybem bezokolicznym, spójniki. Ćwiczenia pisemne jak w I. kl.

*Historya.* 2 g. t. *Historya starożytna* sposobem biograficznym.

*Geografia.* 2 g. t. *Polityczna geografia Azji i Afryki.* Pionowy i poziomy kształt i hydrografia Europy całej; szczegółowy opis Europy zachodniej i południowej.

*Matematyka.* 3 g. t. *Arytmetyka i geometrya* według zarysu organizacyjnego. Ćwiczenia pisemne jak w kl. I.

*Historya naturalna.* W I. półroczu: ptaki, gady, płazy i ryby; w II. półr. botanika.

### III. Klasa.

*Religia.* 2 g. t. *Dzieje nowego zakonu.*

*Język łaciński.* 6 g. t. *Z gramatyki nauka składni przypadków.* Czytano z Korneliusa Neposa żywoty: Milecyadesa, Temistoklesa, Epaminondasa, Hannibala, Katona, Atyka, Konona. Co 14 dni zadanie domowe, co miesiąc szkolne.

*Język grecki.* 5 g. t. *Do stałego perfectum włącznie.* W II. półroczu co 14 dni zadanie domowe i szkolne na przemianę.

*Język polski.* 3 g. t. *Składnia rzędu.* Czytanie Wypisów. Zadania pisemne jak w I. i II. klasie.

*Język niemiecki.* 4 g. t. *Nauka o szyku wyrazów w zdaniach głównych i pobocznych, tudzież o użyciu przypadku 1 i 4.* Czytanie, rozbieranie zdań z odwoływaniem się do prawideł gramatycznych, opowiadanie przeczytanych przedmiotów, tłumaczenie z polskiego na niemieckie i odwrotnie. Co 14 dni zadanie domowe lub szkolne.

*Historya.* 1 g. t. *Dzieje średniowieczne* sposobem biograficznym.

*Geografia.* 2 g. t. *Szczegółowy opis Europy, północnej i wschodniej, z wyjątkiem monarchii austriackiej.* Oro- hydrotopografia Ameryki i Australii.



*Matematyka.* 3 g. t. Arytmetyka i geometrya według zarysu organizacyjnego. Ilość i sposób zadań pisemn. jak w I. i II. klasie.

*Historja naturalna.* 2 g. t. W I. półr.: Mineralogia. W II. półr.: fizyka. Dział chemii ukończono.

#### IV. Klasa.

*Religia.* 2 g. t. Nauka o ceremoniach i obrzędach kościoła katolickiego.

*Język łaciński.* 6 g. t. Z gramatyki nauka o trybach i czasach, oratio obliqua, supinum, gerundium. Czytano w obu oddziałach de bello gall. Lib. I, III, VII Cap. 1—35, 68—90. Ćwiczenia pisemne jak w III. klasie.

*Język grecki.* 3 g. t. Słowo nieforemne ukończono. Ćwiczenia pisemne jak w III. klasie.

*Język polski.* 3 g. t. Gramatyka o zdaniu złożoném, składnia szyku, interpunkcyja, wierszowanie. Czytanie Wypisów Zadania pisemne jak w III. klasie.

*Język niemiecki.* 4 g. t. Powtórzenie gramatyki, z szczególném uwzględnieniem składni rzędu. Czytanie z dokładném rozbieraniem rzeczy. Zadania pisemne jak w III. klasie.

*Historja.* 4 g. t. W I. półroczu: Średnie wieki do końca i nowsze dzieje.

*Geografia.* W II. półroczu 4 g. t. Geografia austriacko-węgierskiej monarchii.

*Matematyka.* 3 g. t. Według zarysu organizacyjnego. Zadania pisemne jak w III. klasie.

*Fizyka.* 3 g. t. Przedmiot ukończono.

#### V. Klasa.

*Religia.* 2 g. t. Introdukcyja do nauki wiary katolickiej.

*Język łaciński.* 6 g. t. Czytano w oddz. A: z Liwiusa L. II C. 16—40, L. XXI; z Owidyusa Trist. I El. 1, 3, IV



El. 10; Fastorum II, w. 83—118, 195—242; Metamor. L. I w. 89—162, w. 163—415. W oddz. B. z Liwiusa L. II C. 23 do końca; L. XXII całą. Z Owidyusa Trist. V, 2; ex Ponto I, 3, Heroid. III, Fastorum II w. 687—710, Metamorph. I, w. 90—160, 253—415, VIII w. 611—724, XII w. 85—193.

*Język grecki.* 5 g. t. Czytanie w obu oddziałach odpowiednich ustępów z chrestomaty Schenkla; Homer. Iliad. I, wierszy 281. Powtarzanie gramatyki. Co miesiąc jedno zadanie domowe lub szkolne.

*Język polski.* 3 g. t. Czytano w obu oddziałach Wypisy z objaśnieniami dotyczącymi staropolskiego języka i historii literatury. Prócz tego: Znaczną część z Żywota pocziwego człowieka Mikołaja Reja. Co 3 tygodnie jedno zadanie.

*Język niemiecki.* 3 g. t. Czytano, rozbierano i opowiadano ustępy z Wypisów. Co 14 dni jedno zadanie.

*Historia i Geografia.* 4 g. t. Historia państw wschodnich z szczególném uwzględnieniem cywilizacyi ludów. Historia Grecyi, w której położono szczególny nacisk na epokę Peryklesa i czasy Filipa II. macedońskiego. Z historii rzymskiej: stosunki etnograficzne Italii, epoka królów, dzieje rzeczypospolitej do r. 366.

*Matematyka.* 4 g. t. Według zarysu organizacyjnego. Co 4 tygodnie jedno zadanie szkolne; do każdej lekcyi przerabiano kilka przykładów w domu.

*Historia naturalna.* 2 g. t. W I. półr. Mineralogia. W II. półr. Botanika.

## VI. Klasa.

*Religia.* 2 g. t. Nauka wiary katolickiej.

*Język łaciński.* 6 g. t. Czytano w oddz. A: Salustii Conjur. Catil. w II półr. Vergil. Bucol. I, Georg. I. w. 1—60, II. w. 136—176, 458—542; Aeneid. L. I, w. 1—34, L. II. w oddz B: Sall. bellum Jugurth.; Vergil. Bucol. I,



Georg. I, w. 1—43, II, 136—176, Aeneid. L. I, II, 1—300. Zadania pisemne jak w V. kl.

*Język grecki.* 5 g. t. W oddź. *A*: Homeri Il. I, II, XVIII; w 2 półr. Odyss. I, VI, IX, XVIII; w oddź. *B*: Il. II, III, IV; Odyss. XVII—XX. Zadania pisemne jak w V. klasie.

*Język polski.* 3 g. t. Czytano w obu oddziałach z odpowiednich téj klasie wypisów. Oprócz tego kazania sejmowe Skargi w całości. Liczne wyjątki z Jerozolimy wyzwolonej przekładu Piotra Kochanowskiego. Zadania pisemne jak w V. klasie.

*Język niemiecki.* 5 g. t. Czytano i rozbiegano w obu oddziałach przedmioty z Wypisów Jandaúrka. Nadto uczniowie czytali wiele prywatnie, w szkole zaś „Clavigo“. Zadania pisemne jak w V. klasie.

*Historia i Geografia.* 5 g. t. Historia rzeczypospolitéj rzymskiej od r. 201—31, dzieje cesarstwa rzymskiego. Z historii średniowiecznej aż do wygaśnięcia Karolingów w Niemczech, tj. r. 911.

*Matematyka.* 3 g. t. Według zarysu organizacyjnego. Zadania pisemne jak w V. klasie.

*Historia naturalna.* 2 g. t. Zoologia.

## VII. Klasa.

*Religia.* 2 g. t. Nauka Moralna.

*Język łaciński.* 5 g. t. Czytano w oddź. *A* z Vergil. Aeneid. L. VI; Cycerona Catilinaria I, pro Roscio Amerino, De Amiticia C. 1—16; w oddź. *B* z tą różnicą, że zamiast mowy pro Roscio czytano pro Archia. Zadania pisemne jak w VI. klasie; ustne stylistyczne ćwiczenia.

*Język grecki.* 4 g. t. Czytano w oddź. *A* Demostenesa mowę olintyjską I. przeciw Filipowi III., Sofoklesa Antygonę. W oddź. *B* Demost. Olint. I, o sprawach Chersonesu; z Sofoklesa Oedip. Rex. w. 1—1085. Gramatyka, ćwiczenia pisemne jak w VI. klasie.



*Język polski.* 3 g. t. Czytano z odpowiedniem objaśnieniem co do historyi literatury, prócz ustępów zawartych w wypisach szkolnych, z Wacława Potockiego „Wojnę Chocimską“, „Zabobonnik“ komedya Zabłockiego. Zadania pisemne jak w VI. klasie.

*Język niemiecki.* 4 g. t. Wzięto według Eggera historyą literatury niemieckiej od najdawniejszych czasów do końca XVIII. wieku. Czytano i rozbiegano Schillera: „Wilhelm Tell“. Zadania pisemne jak w VII. klasie.

*Historya i Geografia.* 3 g. t. Historya nowożytna od pokoju westfalskiego (1648) do r. 1748 z szczególnym uwzględnieniem dziejów austriackich.

*Matematyka.* 3 b. t. Według zarysu organizacyjnego. Zadania pisemne jak w VI. klasie.

*Fizyka.* 3 g. t. Własności ciał, ciepło, chemia, statyka i dynamika.

*Logika.* 2 godziny tygodniowo.

## VIII. Klasa.

*Religia.* 2 g. t. Historya kościelna.

*Język łaciński.* 5 g. t. Czytano w I. półr. Ody Horacego, razem 21; Satyr. I, 1, 4, 6. Taciti Annales I. Ustne stylistyczne ćwiczenia i pisemne jak w VII. klasie.

*Język grecki.* 5. t. Czytano w I. półr. Sofoklesa Ajax, w II. półr. Platona Laches. Ćwiczenia pisemne jak w VII. klasie.

*Język polski.* 3 g. t. Czytano z rozbiorem estetycznym z Wypisów. Prócz tego Pana Tadeusza, Irydyona, Mohorta. Zadań piśm. jak w VII. klasie.

*Język niemiecki.* 3 g. t. Wzięto według Eggera historyą literatury XIX. wieku, tudzież czytano i rozbiegano: „Walensteins Tod“. Ćwiczenia pisemne jak w VII. klasie.

*Historya i Geografia.* 3 g. t. W I. półroczu dokończono historyi; w II. półr. statystyka monarchii austriackiej z szczególnym uwzględnieniem organizacyi politycznej i administracyjnej.



*Matematyka.* 1 g. t. Powtórzenie całej nauki matematycznej, ćwiczenia w rozwiązywaniu zagadnień algebraicznych i geometrycznych.

*Fizyka.* 4 g. t. Materiał przepisany ukończono.

*Psychologia.* 2 godziny tygodniowo.

### Przedmioty nadobowiązkowe.

|                                |           |            |      |   |  | Razem<br>uczniów |
|--------------------------------|-----------|------------|------|---|--|------------------|
| <i>Język francuski</i> .....   | w 3 oddz. | po 2 godz. | tyg. |   |  | 54               |
| <i>Dzieje kraju rodzinnego</i> | w 6       | " po 1     | "    | " |  | 118              |
| <i>Rysunki</i> .....           | w 3       | " po 2     | "    | " |  | 136              |
| <i>Kaligrafia</i> .....        | w 2       | " po 2     | "    | " |  | 83               |
| <i>Stenografia</i> .....       | w 2       | " po 2     | "    | " |  | 32               |
| <i>Śpiew</i> .....             | w 3       | " po 2     | "    | " |  | 60               |

*Gimnastyka.* Na ćwiczenia gimnastyczne uczęszczali uczniowie w liczbie 97 do sali miejskiej w 3 oddziałach po 2 godz. tygodniowo.

### Wykaz książek, które w roku szkolnym 1880 używane będą:

*Religia.* W I. kl.: Katechizm Szustera przez ks. Zielińskiego; w II. kl.: Dzieje starego zakonu Tyca; w III. kl.: Dzieje nowego zakonu Tyca; w IV. kl.: Liturgia ks. Wład. Jachimowskiego; w V. kl.: Introdukcya do pisma św. przez ks. Jachimowskiego; w VI. kl. Dogmatyka ks. Jachimowskiego; w VII. kl. Etyka ks. Soleckiego; w VIII. kl. Historia kościelna ks. Jachimowskiego.

*Język łaciński.* A) Gramatyka we wszystkich klasach Poplińskiego. B) Ćwiczenia: w I. kl. Przykłady Poplińskiego na Sextę; w II. kl.: na Quintę; w III. i IV. kl.: na Quartę w V. kl.: Ćwiczenia Jerzykowskiego dla klas średnich część I; w VI. kl.: tegoż część II; w VII. kl.: Trzaskowskiego część II.



*Język grecki.* Gramatyka i ćwiczenia we wszystkich klasach Samolewicza.

*Język polski.* A) Gramatyka we wszystkich klasach niższego gimnazjum Małeckiego. B) Wypisy w klasach I. do IV. tomy I. do IV; w kl. V Tom I. część I; w kl. VI. cz. II. w kl. VII. tom II. cz. I; w kl. VIII. tom II. cz. II.

*Język niemiecki.* A) Gramatyka w I. i II kl. Schobera tł. p. Rebena, część I; w III. kl. tegoż autora część II; w IV. Janoty. B) Wypisy w I. i II. kl. Rebena; w III. i IV. kl. Hamerskiego; w V. kl. Jandaurka cz. I; w VI. kl. Jandaurka cz. II; w VII. kl. Dr. Alojz. Eggera II. Bd, I. Teil; w VIII. Eggera II. Band I. Teil.

*Historja Sawczyńskiego.* W II. kl.: Dzieje starożytne, w III. kl. średniowieczne; w IV. kl.: nowsze; w V. kl.: Pütza, dzieje starożytne, w VI. kl. Pütza średniowieczne; w VII. nowsze Poplińskiego.

*Geografia.* W I kl.: Bellingera; w II. i III. kl.: Wiślickiego, atlas Kieperta, w innych klasach Stoegera.

*Arytmetyka.* W I. i II. kl.: Bączalskiego dla klas niż. gimn. cz. I.; w III. i IV. kl. téjsaméj książki cz. II. przez Grzybowskiiego i Bączalskiego.

*Geometria.* W niższych klasach Mocnika przez Sternala; w wyższych Mocnika przez Staneckiego.

*Historja naturalna.* W I. kl. i I. półr. II. kl.: Zoologia obrazowa Nowickiego; w II. półr. II. kl.: Botanika Hückla; w III. kl.: w I. półr.: Mineralogia Kłęska; w V. kl. w I. półr.: Mineralogia Łomnickiego; w II. półr.: Botanika Billa przez Łomnickiego; w VI. kl. Zoologia Schoedlera przez Wałeckiego.

*Fizyka.* W III. kl. w II. półr. i w IV. kl. Rodeckiego wydanie 2gie, w VII. i VIII. kl.: Chlebowskiego.

*Propedeutyka.* Logika Kremiera. Psychologia Crügera przez Sawczyńskiego.



## Zagadnienia do wypracowań polskich.

### Klasa V $a + b$ .

1. Opisanie wakacyj. 2. Concordia parvae res crescunt. discordia maximae dilabuntur. Znaczenie Fenicyan w dziejach starożytnych. 4. Ordo anima rerum. 5. Wpływ geograficznego położenia Grecyi na rozwój starożytnych Hellenów. 6. Złe towarzystwa psują dobre obyczaje. 7. Mikołaj Rej i jego zasługi w piśmiennictwie polskiem. 8. Ateńczycy a Spartanie. 9. Młodość Cyrusa według Xenofonta. 10. Życie Owidyusa. 11. Zasługi Kaźmierza Wielkiego. 12. Quidquid agis, prudenter age et respice finem.

### Klasa VI $a + b$ .

1. O pożytkach rzek. 2. Publius Korn. Scypio. Charakterystyka na podstawie wykładu historii (szkolne). 3. Okażać rozwój uczucia, jego stopniowanie i zmiany w trenach Kochanowskiego. 4. Jakie powody skłoniły Sallustyusa do pisania historii? (szkolne). 5. Charakterystyka głównych osób z odprawy posłów greckich J. Kochanowskiego. 6. Obrazek życia wiejskiego na podstawie wiersza Kaspra Miaskowskiego „Włoszczonowska Waleta“. (szkolne). 7. Rokowania Sulli z Bokchusem, królem Maurytanii (na podstawie Sallustyusa). 8. Opisać rzekę od ujścia do źródeł pod względem zmian zachodzących w jej biegu i okolicach, przez które przepływa. 9. Stosunek Cezara do Pompejusza aż do chwili zbrojnego pomiędzy nimi starcia. 10. Pochwała życia wiejskiego na podstawie drugiej księgi Ziemiaństwa Wirgiliusa. 11. O zawodzie kaznodziejskim Skargi (szkolne). 12. W jaki sposób używali mitologii poeci nasi XVI. wieku?



### Klasa VII $a + b$ .

1. Na podstawie lektury skreślić ogólne wiadomości o Salustyuszu, jako o pisarzu historycznym.
2. Demostenes do czasu pierwszej mowy olintyjskiej.
3. Na podstawie przeczytanych ustępów z Iliady, Odyssei i Jerozolimy wyzwolonej, określić istotę eposu.
4. Wytlómaczyć słowa Opalińskiego: „Zacnieś się urodził, ale żyjesz jako flis albo jako hajduk“.
5. Napady Tatarów na Polskę (na podstawie szkiców Szajnochy).
6. Historia kropli wody.
7. Wybrać jedną z wybitniejszych postaci w dziejach XVI. w. i usprawiedliwić wybór.
8. Wytlómaczyć myśl, której Demostenes użył jako założenia do swjej mowy olintyjskiej: „w Olinie broniemy Attyki“.
9. Opowiedzieć treść jednego ze znanych poetycznych utworów.
10. Jakie korzyści młodzież odnosi z czytania dobrych powieści?
11. Wedle danej dyspozycji wytlómaczyć myśl:

Największego grzesznika Bóg sił nie pozbawia,

Tylko na karę własnym siłom go zostawia.

12. Skreślić charakter Antygony w tragedyi Sofoklesa.
13. Podać definicyą przyjaźni i wykazać dodatnie jej strony (Cic. de amicitia VI, VII.).

### Klasa VIII.

1. Charakterystyka Wiesława.
2. Samotność mędrców mistrzynią.
3. O potrzebie rozwoju handlu i przemysłu.
4. Życie Horacego.
5. Charakter Wallensteina.
6. Młodość Mickiewicza.
7. Ludwik XIV. w dziejach Francji.
8. Rozum a serce.
9. Potęga przyzwyczajenia.
10. Okres Zygmunowski literatury polskiej porównany z okresem panegirycznym.

### Zagadnienia do wypracowań niemieckich.

### Klasa V $a$ .

1. Der Sparsame und der Geizige.
2. Inhaltsangabe der Romanze „Der Kampf mit dem Drachen.“
3. Jeder ist seines



Glückes Schmied. 4. Coriolan. Nach der lateinischen Lectüre. 5. Über die Kunst im Entbehren. 6. Das Weihnachtsfest ein Fest der Freude. 7. Inhaltsangabe der Ballade „Arion“. 8. Das Pferd als Gehilfe des Menschen. 9. Schiller's „Kraniche des Ibykus“ u. Schlegels „Arion“. 10. Die Folgen der Perserkriege für Griechenland. 11. Cid's Charakter nach Herder's gleichnamigem Romanzenzyklus. 12. Frühlingsgedanken. Nach der Schullectüre. 13. Inhaltsangabe des Herder'schen Gedichtes „Ross aus dem Berge“. 14. Die vier mythischen Zeitalter. Nach Ovid. 15. Das Gewitter. Eine Schilderung. 16. Der Tod der Fabier. Nach Ovid.

### Klasa V b.

1. Beschreibung der Ferien. 2. Es ist Lessings „Zeus und das Pferd“ mit eigenen Worten anzugeben. 3. Uiber den Nutzen des Holzes. 4. Wohnzimmer und Schulzimmer. 5. Beschreibung des Herbstes. 6. „Der getreue Eckart“ (Inhaltsangabe). 7. Uiber den Nutzen des Eisens (Nach der Lektüre). 8. Es ist Herders Parabel, „die drei Freunde“ mit eigenen Worten anzugeben. 9. Das hölzerne Pferd (Aus dem klassischen Altertum). 10. Uiber die Verwendung des Goldes (Nach der Lektüre). 11. Arion (Inhaltsangabe des gelesenen Gedichtes von Schlegel). 12. Solon's Gesetzgebung. 13. Uiber die Verwendung des Salzes (Nach der Lektüre) 15. Beschreibung des Winters. 16. Welchen Zweck hatte die Erziehung in Sparta (Nach der Lektüre). 17. Beschreibung der Ostern. 18. Meine Tagesordnung. 19. Annehmlichkeiten des Landlebens. 20. Die Ursachen der Perserkriege.

### Klasa VI a+b.

1. Inhaltsangabe des gelesenen Stückes „Dädalus u. Ikarus“. 2. Der Herbst u. seine Freuden. 3. Das Glas, seine Bedeutung u. Geschichte. 4. Inhaltsangabe des gelesenen Stückes „Die Bürg-



schaft“ 5. Die Schlacht bei Cannä. 6. Kriemhildens und Hagens Charakter. 7. Der heilige Christabend. 8. Der Sänger von Goethe u. des Sängers Fluch von Uhland. 9. Die Reformen der beiden Gracchen. 10. Ueber die Lichtseiten des Krieges. 11. Die Einführung des Christentums in Littauen. 12. Nutzen des Ackerbaues. 13. Vergils Leben und Werke. 14. Es ist Goethes „Erlkönig“ mit Herders „Erlkönigs Tochter“ zu vergleichen. 15. Ueber den Nutzen des Reisens. 16. Demosthenes als Staatsmann (nach der Lectüre). 17. Das Stadtleben von seiner Lichtseite betrachtet. 18. Wie Odysseus die Narbe, an der ihn Eurykleia erkannte, erhalten hatte. 19. Wie soll der Jüngling seine Schulferien anwenden. 20. Chlodwig, dessen Charakter, Leben und Taten.

### Klasa VII $a+b$ .

1. Die Bedeutung der Ströme für die Cultur. 2. Ueber die zweckmässige Benützung der Sonn- und Feiertage. 3. Gedankengang der ersten Olynthischen Rede. 4. Der Selbstgefällige. Eine Charakterschilderung. 5. Cicero's Leben. 6. Johanna's Benehmen gegen ihren Vater in Schiller's „Jungfrau von Orleans“. 7. Es ist der erste Aufzug aus Schiller's „Wilhelm Tell“ nach den Regeln der Technik des Dramas zu besprechen. 8. Hedwig Tell und Gertrud Stauffacher (eine Parallele nach Schiller's „Wilhelm Tell“). 9. Der Einfluss der Erfindung des Schiesspulvers auf die Weltverhältnisse. 10. Ueber die Einrichtung des griechischen Theaters. 11. Schiller's und Skowacki's „Maria Stuart“. 12. Das Lob der Poësie. Nach Cicero's „Pro Archia poëta“. 13. Der 24. April 1879 ein Jubeltag für Oesterreich's Völker. Eine Festrede. 14. Gedankengang des Goethe'schen Epilogs zu Schiller's „Lied von der Glocke“. 15. Wodurch trägt ein Fluss oder ein Bach zur Verschönerung einer Landschaft bei? 16. Charakter des Orest aus Goethe's „Iphigenie auf Tauris“.



**Klasa VIII.**

1. „Im engen Kreis verengert sich der Sinn. Es wächst der Mensch mit seinen grössern Zwecken“. Schiller. 2. Bildung macht frei. 3. Charakter der Hauptpersonen aus Sophokles' Elektra. 4. Vorteile und Nachteile des Reichtums. 5. Der Gang der Handlung in Sophokles' Aias. 6. Leidenschaft und Sturm (eine Parallele). 7. Wallenstein's Charakter. Nach Schillers „Wallensteins Tod“. 8. Die Schule ein Garten. 9. Warum wir deutsch lernen (in Briefform). 10. Gedankengang in Plato's „Laches“. 11. Es ist an Goethe's „Hermann und Dorothea“ und Mickiewicz' „Herrn Thaddäus“ das Wesen des Epos darzulegen. 12. Der Zug des Germanicus nach Germanien. Nach Tacitus.





## Statystyka uczniów.

| W klasie   | Uczniowie publiczni |          | Wypadek klasyfikacji przy końcu roku szkolnego |     |    |    |               |               |
|------------|---------------------|----------|------------------------------------------------|-----|----|----|---------------|---------------|
|            | na początku         | na końcu | S t o p i e ń                                  |     |    |    |               |               |
|            |                     |          | celujący                                       | 1.  | 2. | 3. | w zawieszaniu | przešlo uczyć |
| Ia         | 49                  | 46       | 2                                              | 24  | 4  | 11 | 5             | 3             |
| Ib         | 49                  | 45       | 8                                              | 21  | —  | 11 | 5             | 4             |
| Ic         | 47                  | 41       | 1                                              | 15  | 4  | 16 | 5             | 6             |
| Id         | 45                  | 39       | 4                                              | 20  | —  | 10 | 5             | 6             |
| IIa        | 38                  | 36       | 7                                              | 16  | 3  | 5  | 5             | 2             |
| IIb        | 40                  | 36       | 3                                              | 18  | 1  | 4  | 10            | 4             |
| IIc        | 41                  | 38       | 2                                              | 22  | 2  | 6  | 6             | 3             |
| IIIa       | 42                  | 33       | 2                                              | 13  | —  | 8  | 10            | 9             |
| IIIb       | 43                  | 37       | 5                                              | 24  | 1  | 4  | 3             | 6             |
| IVa        | 46                  | 43       | 6                                              | 23  | —  | 5  | 9             | 3             |
| IVb        | 51                  | 49       | 8                                              | 25  | 5  | 2  | 9             | 2             |
| Va         | 31                  | 29       | 9                                              | 11  | 1  | 2  | 6             | 2             |
| Vb         | 33                  | 31       | 4                                              | 17  | 2  | 2  | 6             | 2             |
| VIa        | 37                  | 35       | 5                                              | 18  | —  | 2  | 10            | 2             |
| VIb        | 32                  | 28       | 7                                              | 15  | 1  | 1  | 4             | 4             |
| VIIa       | 34                  | 34       | 9                                              | 19  | 1  | —  | 5             | —             |
| VIIb       | 33                  | 32       | 7                                              | 17  | —  | 4  | 4             | 1             |
| VIII       | 45                  | 44       | 6                                              | 33  | 4  | 1  | —             | 1             |
| Razem      | 736                 | 676      | 95                                             | 351 | 29 | 94 | 107           | 60            |
| Prywatyci. |                     |          |                                                |     |    |    |               |               |
|            | 14                  | 12       | 2                                              | 5   | 2  | 1  | 2             | 2             |



W porównaniu z rokiem szkolnym 1878 przybyło uczniów publicznych 28.

Z tych uczniów było według przynależności do gminy:

a)

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| z Krakowa lub okręgu ..... | 340 |
| z Galicyi .....            | 254 |
| obcokrajowej .....         | 94  |

b)

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| Było religii rzymsko-katolickiej ..... | 636 |
| „ „ grecko- katolickiej .....          | 1   |
| „ wyznania ewangelickiego .....        | 3   |
| „ „ mojżeszowego .....                 | 48  |

c)

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| Mowa ojczysta jest polska u ..... | 764 |
| „ „ „ niemiecka u .....           | 14  |

d)

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| Uczniów I. klasy w wieku lat 10 było ..... | 13 |
| „ „ 11 „ .....                             | 38 |
| „ „ 12 „ .....                             | 45 |
| „ „ 13 „ .....                             | 28 |
| „ „ 14 „ .....                             | 25 |
| „ „ 15 „ .....                             | 16 |
| „ „ 16 „ .....                             | 7  |
| „ „ 17 „ .....                             | 3  |
| „ „ 18 „ .....                             | 2  |

e)

|                                                 |      |
|-------------------------------------------------|------|
| Płaciło szkolne całe .....                      | 376  |
| Uwolnionych od całego szkolnego .....           | 312  |
| Szkolna opłata przyniosła kwotę złr. w. a. .... | 8180 |



### A) Stypendya pobierało uczniów 34.

Suma stypendyów wynosi razem 3831 złr. 50 ct.

*Uw.* Z zapisu śp. ks. Raciborowskiego z powodu częściowo niewypłaconych odsetków przypadło w upłynionym roku tylko 50 złr. w. a.

### B) Pomoc koleżańska.

#### a) Wyższe gimnazyum.

*Dochód.* Pensyonat Wgo Georgeona 10 złr.; prof. Czubek 66 ct.; ks. Rektor Słotwiński 2 złr.; nieprzyjęty od kasy dodatek do podatku od taks. 55 ct.; Leo z klasy VIII. 5 złr.; Kraszewski z kl. VIIa 3 złr.; Górski z kl. VIIa 1 złr.; Karwacki z kl. VIIa 1 złr.; Bednarski z kl. VIIb 2 złr.; N. N. 1 złr. 25 ct.; uczniowie VIII. kl. 49 złr. 30 ct.; VIIa kl. 90 złr. 70 ct.; VIIb kl. 11 złr. 80 ct.; VIa kl. 22 złr. 80 ct.; VIIb kl. 21 złr.; Va kl. 47 złr. 50 ct.; Vb kl. 18 złr. Razem 287 złr. 56 ct.

*Rozchód.* Sprawiono odzieży wartości 56 złr. 70 ct.; za 15 uczniów opłacono w części szkolne 30 złr. 60 ct.; jednorazowe wsparcie dane do rąk 196 złr. 26 ct.; na muzykę kościelną przy zakończeniu roku szkolnego 4 złr. Razem 287 złr. 56 ct.

W składkach pośredniczył między poszczególnymi klasami i w ogóle gorliwie się zajmował uczeń VIII. kl. Aleksander Gawroński.

#### b) Niższe gimnazyum.

*Dochód.* Z przeszłego roku pozostało 7 złr. 65 ct.; ze sprzedaży klasyfikacyi za rok 1878 21 złr. 80 ct.; W. Klobasa ofiarował 50 złr.; W. Matejko, dyr. szkoły sztuk pięknych, 10 złr.; W. Benis, dyr. banku hipotecznego, 10 złr.;



po Bożém Narodzeniu kilkunastu uczniów przyniosło jako zebraną w kółku rodzinném przy opłatku kolendę 82 złr. 75 ct. Co miesiąc składali dobrowolnie uczniowie zamożniejsi za pokwitowaniem małe datki w różny sposób, raz więcej, raz mniej, które w przecięciu dochodziły miesięcznie do 32 złr., co przez 10 miesięcy szkolnych uczyniło 320 złr. Razem 502 złr. 20 ct.

*Rozchód.* Na odzież wydano 296 złr. 70 ct.; książek szkolnych do nauki kupiono za 68 złr. 30 ct.; na potrzeby do pisania, pióra, ołówki, papier, zeszyty 10 złr. 15 ct.; opłacono szkolne w różnych kwotach za 17 uczniów 28 złr. 40 ct.; pomniejsze jednorazowe wsparcia np. na kolój, dopłaty do wikt, mieszkania i t. p. 29 złr. 49 ct. Razem 495 złr. 4 ct. Zostaje przeto gotówki 7 złr. 16 ct.

## NABYTEK TEGOROCZNY

do księgozbiorów i muzeów.

### A) Biblioteka nauczycielska.

*Dział Pedagogika i dydaktyka* dzieł 6, tomów 7, między temi dwa darowane przez Wysokie c. k. Ministerstwo Oświaty. *Estetyka i sztuka* dzieł 4, tomów 3 i 2 zeszyty, między temi dzieło w jednym tomie, drugie w trzech zeszytach, dar Akademii Umiejętności Krakowskiéj. *Filologia łacińska* dzieł 5, tomów 5, Gramatyka Dra Samolewicza dar Towarzystwa Pedagogicznego. *Filologia grecka* dzieło w 1 tomie. *Dział autorów łacińskich* dzieł 3 w 10 tomach. *Dział autorów greckich* dzieł 4 w 9 zeszytach. *Język polski* dzieł 6 w 13 tomach. *Język niemiecki* dzieł 4 w 5 tomach; prócz tego 4 książki szkolne. *Historja powszechna* dzieł 11 w 12 tomach, między temi 5 dzieł w 6 tomach dar Akad. Umiej. Krak. *Geografia* dzieł 3 w 3 tomach. *Słownik* Grimma. IV t. Kieperta Grecja starożytna, globus 12 calowy z kompasem i południkiem. *Czasopism* naukowych i pedagogicznych 8.



*Francuski język* dzieło w 1 tomie. *Archeologia i Mitologia* dzieł 3 w 4 tomach i 6 zeszytach, które dotąd wyszły. Pisma mieszanéj treści dzieł 3 w 3 tomach, między temi 1 tom dar Akademii Umiej. Krak. *Obrazy*: Brühl, *Zootomie aller Tierclassen*.

Ogółem posiada biblioteka nauczycielska tomów 5322, zeszytów 363, map 141, atlasów 35, 2 globusy (świeżo sprawiony i dawniejszy, lecz mocno uszkodzony).

### **B) Księgozbiór dla uczniów wyższego Gimnazjum.**

Z działu religii tom. 2, estetyki 3, języka łacińskiego 2 (jeden darowany), języka greckiego 1, autorów łacińskich 3, autorów greckich 1, języka polskiego 6, francuskiego 4 (jeden darowany), historyi 1, geografii 2, podróży 11, powieści 5, fizyki 2, słowników 3, czasopismo 1, pism mieszanéj treści 7 (prof. W. Łepkowski darował pisma pomniejsze Libelta w 6 tomach, z Mitologii i Starożytności 4).

### **C) Niższe gimnazjum.**

Z działu dziejów powszechnych 1, podróży 2, powiastek 7, czasopism 2.

Ogółem liczy księgozbiór dla młodzieży 1220 tomów.

Czytelnia otwartą była dla uczniów w każdą środę i sobotę od 2—4 godz. i w każdą niedzielę od 9—11. Także wypożyczano do domu książki za opłatą miesięczną po 10 ct. Rozdawaniem i odbieraniem książek zajmowali się uczniowie VII. kl. Karaś Zygmunt, Kraszewski Stefan, Romer Stanisław, Strihavka Teodor, Suski Ignacy; szczególniejszą zasługę w tym względzie położył Majewski Aleksander z VII. kl.

### **D) Książki szkolne dla ubogich uczniów wyższego gimnazjum.**

Kupiono Jachimowskiego *Dogmatyka* egzempl. 1, Jerzykowskiego *Ćwiczenia łacińskie* część I. 2 egz., część II. 1, Sallu-



styusa 1, Wergilego 2, Homera Iliady 1, Odyssei 1, Platona 2 egz., Eggera Wypisów II<sub>1</sub> egz. 10, II<sub>2</sub> egz. 10, Jandaurka dla VI 1, Wypisów polskich tom I, część II, 1 egz., Mocnika Algebry 1, Geometrii 1, Schoedlera Zoologii 1 egz.

### **E) Dla ubogich uczniów niższego gimnazjum.**

Katechizm Zielińskiego 11 egz., Poplińskiego łąc. gram. 3 egz., tegoż Przykładów łąc. na Sextę 8 egz., Curtiusa gram. greck. 5 egz., Schenkla ćwic. greck. 1 egz., Hamerskiego Wypisów 1, Rebera Gramatyki 6 egz., tegoż Wypisów 2 egz., Wypisów polskich tom I. 2 egz., Małeckiego Gram. 2 egz., Weltera Historii tom I. 5 egz., tom II. 2 egz., Bellingera Geogr. 2 egz., Wiślickiego 1, Bączalskiego Arytmetyka 3 egz., Mocnika Geom. 1, Nowickiego Zoologii 1, Kłęska Mineralogii 1 egz.

Ogółem wszystkich książek 1520.

### **F) Gabinet fizyczny.**

Studnia Herona. Fontanna przerywana. Helmholtza Rezonatory (9 sztuk na podstawie). Przyrząd do przedstawienia figur Lissajous'a z całym urządzeniem. Katetometer. Nikola pryzmat do przyrządu polaryzacyjnego wraz z oprawą. Turmalinowa płytka z oprawą do tegoż przyrządu. Podstawka do przyrządu polaryzacyjnego.

### **G) Gabinet historii naturalnej.**

Lepus cuniculus (dar Stefana Lubomirskiego z VI. kl.). Larus marinus (dar Wincentego Eminowicza z II. kl.). Przyrząd skrzelowy ryby (dar Jana Opieńskiego z V kl.). Loligo vulgaris (preparat suchy, dar Jana Kantego Kirchmayera z V. kl.). Aplisia punctata (darował Ferdynand Marqua, naturalista w Lublanie). Ascidia intestinalis (darował prof.



Kłęsk). *Actinia viridis* (dar. Ferd. Marqua, naturalista w Lublanie). *Spongia adriatica* (dar Wilhelma Strihavki z V. kl.). *Raniera fleggrana* (dar tegoż). *Brühl*, Zootomie aller Tierclassen, zeszyt 11, 12 i 13.—681 gatunków roślin z powiatu Bobreckiego (darował Bronisław Gustawicz, nauczyciel tegoż gimnazjum). 6 ram oszlonych do zawieszania w klasach. 50 fascykułów do zielnika. 300 pudełek pod minerały.

### Fundusze.

#### *Przychód.*

|                                                                |      |      |    |     |
|----------------------------------------------------------------|------|------|----|-----|
| Z taks wstępnych .....                                         | 455  | złr. | 70 | ct. |
| Z opłat na zbiory naukowe .....                                | 757  | "    | —  | "   |
| Taksy za wydane duplikaty świadectw .....                      | 59   | "    | —  | "   |
| Pozostałość z r. 1878 z funduszu na fizykalny<br>gabinet ..... | 10   | "    | 21 | "   |
| Dochód z czytelnicy uczniów.....                               | 46   | "    | 89 | "   |
| Razem.....                                                     | 1328 | złr. | 80 | ct. |

Z téj kwoty opędzono wydatki na sprawunki powyżej wykazane, zostało jednak na długi w księgarni Wgo Friedleina 107 złr. 36 ct.

### Wynik egzaminu dojrzałości.

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| Poddało się egzaminowi uczniów publicznych ..... | 43 |
| Obcych .....                                     | 2  |

#### *Z uczniów publicznych otrzymało:*

|                                                   |    |
|---------------------------------------------------|----|
| Świadectwo dojrzałości z odznaczeniem.....        | 7  |
| " dojrzałości.....                                | 24 |
| Będzie poprawiało egzamin z jednego przedmiotu .. | 7  |
| Cofnięto na pół roku.....                         | 3  |
| Cofnięto na cały rok.....                         | 2  |
| Z obcych otrzymał świadectwo dojrzałości.....     | 1  |
| Cofnięto na cały rok.....                         | 1  |

#### *Wiek abiturjentów:*

|                     |    |
|---------------------|----|
| W wieku lat 17 było | 4  |
| " 18 "              | 12 |
| " 19 "              | 5  |



W wieku lat 20 było 10

" 21 " 8

" 22 " 3

" 23 " 1

*Z 32 uczniów, którzy otrzymali świadectwo dojrzałości,  
udaje się:*

na teologią ..... 3

" prawo ..... 12

" medycynę ..... 10

" wydział filologiczno-historyczny. 4

" " matematyczny ..... 2

do szkoły sztuk pięknych..... 1

### Kronika Gimnazjum.

Egzamina z uczniami do I. klasy wstępującymi odbyły się w dniach 28 do 31 sierpnia, dla słabych początków cofnięto 26.

Rok szkolny rozpoczął się wezwaniem św. Ducha w kościele św. Anny w solenny sposób dnia 1 września.

Nauczyciel-zastępca p. Dr. Zbigniew Kniaziółucki przyjąwszy posadę adjunkta w archiwum krajowym, uwolniony został od obowiązków nauczycielskich w sierpniu z. r. Młody ten i uzdolniony nauczyciel zostawił po sobie miłą pamięć u kolegów i między uczniami.

Z początkiem roku objęli swe posady nowo zamianowani nauczyciele p. Tytus Świdorski i Juliusz Miklaszewski, również jak prof. Antoni Soswiński, który z gimnazjum Franciszka Józefa na własną prośbę do gimnazjum św. Anny przeniesiony został.

Dnia 4 października obchodziło gimnazjum uroczystym nabożeństwem i odśpiewaniem hymnu w kościele św. Anny Imieniny Najjaśniejszego Pana; w podobny sposób dnia 19 listopada dzień Imienin Najjaśn. Cesarzowej.

Ponieważ znaczna liczba godzin matematycznych przypadała aplikantom nieegzaminowanym, przeto przeniosła Wys.



Rada Szkolna Krajowa nauczyciela-zastępcę p. Ignacego Serwina z tutejszej szkoły realnej do gimnazjum św. Anny. Tenże objął czynność nauczycielską dnia 25 listopada, poczem aplikant p. Balon Józef rzekł się swęj posady.

Dnia 30 listopada był wieczór muzykalno-deklamacyjny ku uczczeniu pamięci wieszcza naszego Adama Mickiewicza. Popisy uczniów zjednały sobie uznanie objawione rzesistymi oklaskami gości, a czysty dochód przyniósł kwotę 80 złr. Kapitał celem utworzenia stypendyum dla ubogiego ucznia gimnazjum św. Anny przewyższa dotąd kwotę 500 złr.

Z końcem pierwszego półrocza zaszły znaczne zmiany w gronie nauczycieli. Prof. p. Andrzej May, zamianowany najwyższem postanowieniem Najjaśn. Pana z dnia 10 stycznia b. r. dyrektorem państwowej szkoły realnej w Jarosławiu, pożegnał gimnazjum św. Anny, któremu od r. 1868 poświęcał swą pracę nauczycielską i nie małe położył zasługi około pomnożenia i wzbogacenia gabinetu fizykalnego.

Profesorowie Czesław Łoziński i Ignacy Gralewski zamierzając przez wzgląd na swe nadwątlone zdrowie przejść w stały stan spoczynku, zaprzestali wykładów szkolnych. By zastąpić tymczasowo występujących profesorów, zamianowała Wysoka Rada Szkolna aplikantów pp. Michała Celowskiego i Stefana Remera suplentami gimnazjum św. Anny, ostatniego do końca roku szkolnego 1879. Z tego powodu wystąpił aplikant p. Stanisław Borek z grona nauczycieli.

Dnia 25 kwietnia obchodziła młodzież gimnazjum Nowodworskiego uroczystość 25-letniej rocznicy zaślubin Najjaśniejszych Państwa. Po solenném nabożeństwie, które celebrował Najprzewielebniejszy Prałat i Biskup-Nominat X. Albin Dunajewski, nastąpił w Amfiteatrze odczyt prof. i docenta Uniwersytetu Jagiel. dra Augusta Sokołowskiego z dziejów Austrii, w którym wykazał łączność krwi najdostojniejszego domu Habsburskiego z królami Polskimi, poczem popisywało się kilku uczniów w muzyce instrumentalnej tak solo, jak w kwartecie, tudzież w śpiewie choralnym, potem przemówił dyrektor do młodzieży o znaczeniu uroczystości dla Austrii w ogóle, jak dla Polaków w szczególe, a zakończyło odśpiewanie trzech



zwrotek hymnu „Boże uchowaj“, którego licznie zgromadzona publiczność stojąc wysłuchiwała.

Dnia 30 czerwca zakończono rok szkolny uroczystém nabożeństwem i rozdaniem świadectw półrocznych.

### **Niektóre rozporządzenia wydane w upłynionym roku szkolnym przez Wys. c. k. Władze Szkolne.**

Wysokie c. k. Ministerstwo Oświaty określa w rozporządzeniu z dnia 4 listopada z. r. l. 17722 warunki niezbędne do uwolnienia ucznia od szkolnego. Tymi są: obyczaje wzorowe lub chwalebne, pilność wytrwała a przynajmniej zadowalniająca, ogólny stopień celujący lub pierwszy i świadectwo ubóstwa, które jednak nie powinno się zamykać w ogólnikach: „nie posiada majątku ani ruchomego ani nieruchomości“, lecz ma skreślić stan majątkowy ojca, tegoż zatrudnienie, dochody, ilość członków rodziny potrzebujących żywienia i wychowania. Od połowy szkolnego może uczeń być uwolnionym tylko w tym wypadku, jeżeli z świadectwa ubóstwa się okaże, że całego szkolnego opłacać nie może. Warunki wymagane do uwolnienia od szkolnego służą także do zatrzymania uwolnienia po każdym półroczu. Jeżeli przeto uczeń nie zasłużył sobie z obyczajów na cenzurę chwalebną, z pilności zadowalniającą lub w postępie na stopień pierwszy, traci uwolnienie.

To powinno być skazówką dla rodziców do pilnowania dzieci w domu, częstego dopytywania się u dyrektora lub gospodarza klasy o zachowaniu się swych synów.

W. R. S. K. rozporządza reskryptem z dnia 4 stycznia b. r. l. 12173, ażeby uczniów, którzy nie wykażą się metryką chrztu, względnie urodzenia, nie przyjmować do gimnazjum.

Na mocy rozporządzenia Wys. Minist. Ośw. z 22 stycznia b. r. l. 803 uwolnieni są uczniowie publiczni od egzaminu dojrzałości z historii powszechnej i fizyki, jeżeli ich wiadomości z tych przedmiotów w ciągu nauk w VII. i VIII. klasie



dadzą się objąć wypadkową cenzurą celującą lub chwalebłą. Rozporządzenie to późniejszém postanowieniem Wys. c. k. Ministerstwa rozciągniętem zostało także do tych uczniów, którzy w świadectwach z egzaminów prywatnych takie same cenzury uzyskali. A zatem rozporządzenie to nie odnosi się do uczniów, którzy egzamin wstępny zdawali.

Wysoka Rada Szkolna Krajowa podaje okólnikiem z dnia 13 maja b. r. l. 4890 do wiadomości reskrypt ministeryalny, na mocy którego abiturycenci uwolnieni od połowy szkolnego obowiązani są płacić tylko połowę taksy przy egzaminie dojrzałości.

Wysoka Rada Szkolna krajowa rozporządzeniem z dnia 23 lutego 1879 l. 1978 zabrania uczniom szkół średnich wstępu do sal sądowych w celu przysłuchiwania się rozprawom karnym.

### Do Szanownych Rodziców i Opiekunów.

Wpisy uczniów na rok szkolny 1880 zaczną się dnia 27 sierpnia.

Do I. klasy tylko przed południem wpisywać można. Po południu poddadzą się uczniowie z rana do I. klasy wpisani egzaminowi wstępnemu, od którego przyjęcie ich do gimnazjum zawisło.

Uczniowie, którzy dotąd w inném gimnazjum nauki pobierali, *do zakładu nowo wstępujący*, mają okazać świadectwo szkolne z ostatniego półroczu z potwierdzeniem dyrekcyi, że w przyjęciu ich żadna przeszkoda nie zachodzi.

Uczniowie nowowstępujący płacą takse w kwocie 2 złr. 10 ct. Każdy uczeń bez wyjątku, publiczny lub prywatny, ma złożyć kwotę 1 złr. na zbiory naukowe.

Poleca się Rodzicom, Opiekunom lub Osobom, do których nadzór domowy należy, żeby jak najczęściej dowiadywali się u dyrektora lub gospodarza klasy o zachowaniu się szkolném i postępach uczniów. Narzekania przy końcu roku



szkolnego, że nauczyciel sobie coś upatrzył do ucznia, że go rzadko w czasie lekcji egzaminował, że za surowo jego wiedzę oceniał, że rodzice pisemnego zawiadomienia nie otrzymali, i tym podobne motywa, do których rodzice uczniów złym stopniem zagrożonych uciekają się, nie zasługują na uwzględnienia. Tygodniki złożone w kancelaryi dyrektora usuwają zarzuty tego rodzaju, a na każdy sposób wypadało je podnieść w swoim czasie, a nie śpiewać żałosne treny wtedy, kiedy już klęsce zaradzić nie można.

*W Krakowie, dnia 1 sierpnia 1879 r.*

**Ig. Stawarski.**

Dyrektor.



