

2998

5685.

SPRAWOZDANIE DYREKTORA

C. K.

GIMNAZYUM NOWODWORSKIEGO

CZYLI

św. ANNY w KRAKOWIE

za rok szkolny 1886.



W KRAKOWIE.

W Drukarni Wł. L. Anczyca i Spółki,
pod zarządem Jana Gadowskiego.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

1886.

T R E Ś Ć.



1. Zasady goniometrii i trygonometrii prostokreślnej na podstawie rzutów algebraicznych przez Bronisława Gustawicza. str. 3—38.
2. Część administracyjna przez Dyrektora. str. 39—77.



ZASADY GONIOMETRYI I TRYGNOMETRYI PROSTOKRĘSLNEJ

NA PODSTAWIE

RZUTÓW ALGEBRAICZNYCH.

PRZEZ

BRONISŁAWA GUSTAWICZA.

W niniejszej rozprawce rozwinąłem, niezależnie od nauki o kole, główne wzory goniometryczne i trygonometryczne. Wyprowadzenie tychże wzorów, o ile tego wymaga nauka trygonometrii w szkołach średnich, oparłem na rzutach algebraicznych, które zdaniem moim w nauce szkolnej powinny znaleźć większe uwzględnienie, gdyż dostarczają one nadzwyczaj znacznego uproszczenia w dowodzeniu twierdzeń we wszystkich działach geometrii, przede wszystkim zaś w analitycznej.

Przy układaniu tej rozprawki korzystałem z następujących dzieł:

Cagnoli. Trigonométrie rectiligne et sphérique, traduit de l'italien par Chompré. II. édition. Paris. 1808. (wyborne dzieło).

Dr. W. Matzka. Lehre von der Realität vorgeblich imaginärer Grössen. Prag. 1850.

Dr. I. Dienger. Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart. 1867.

- G. H. Niewęglowski.* Trygonometrya. Paryż. 1870.
- Th. Lauda.* Zum trigonometrischen Unterrichte an Mittelschulen. X. Jahresb. der Realschule in Leitmeritz. 1876.
- Dr. R. Baltzer.* Die Elemente der Mathematik. II. Bd. Leipzig. 1878. (znakomite dzieło matematyczne).
- A. Wapienik.* Bemerkungen zum trigonometrischen Unterrichte an Mittelschulen. X. Jahresb. des k. k. Gymnasiums zu Freistadt. 1880.
- Dr. Wł. Zajączkowski.* Wykład trygonometrii płaskiej i kulistej. Lwów. 1881.
- Dr. M. Koch.* Behandlung der Goniometrie und Trigonometrie in der Mittelschule. Programm der deutschen k. k. Staats-Realschule in Budweis. 1883.
- I. Todhunter.* A treatise on plane co-ordinate geometry. London. 1883. (Chapter XVII).
- Plane trigonometry for the use of colleges and schools. London 1886.

Żałuję wszelako, iż wśród téj pracy nie mogłem korzystać z znakomitych dzieł matematycznych *Möbiusa*, gdyż biblioteki nasze krajowe takowych nie posiadają.

W Krakowie, w czerwcu 1886.

I. O rzutach algebraicznych w ogólności.

1. Jeżeli z danego punktu O wykreślimy proste linie do wszystkich punktów utworu przestrzennego i przetniemy owe proste płaszczyzną E , to zbiór wszystkich punktów przecięć zowiemy rzutem (*die projection*) utworu na płaszczyznę.

Ow dany punkt O , w którym się schodzą wszystkie owe proste, do punktów utworu przestrzennego wykreślone, zowie się środkiem rzutowym (*das projectionscentrum*), płaszczyzna zaś E , na którą rzucamy, rzutnią (*die projectionsfläche*); proste linie, wychodzące z środka O i przechodzące przez punkty utworu przestrzennego, zowiemy rzucającymi (*projicierende geraden*), a w powyższy sposób otrzymany rzut środkowym (*die centrale projection*).

Jeżeli środek rzutowy O oddali się w nieskończoność, to linie rzucające przybiorą kierunek do siebie równoległy; w ten sposób powstały rzut zowiemy równoległym (*die parallele projection*).

Jeżeli rzucające nie tylko są do siebie równoległe, lecz także stoją prostopadle do rzutni, otrzymujemy rzut ortogonalny czyli prostopadły (*die orthogonale projection*).

Jeżeli środek rzutowy i twory geometryczne płaskie, mające się rzucić, leżą w jednej płaszczyźnie, to wszystkie rzucające leżą w téjżesaméj płaszczyźnie, którą rzutnia przecina w linii prostej. W tym przypadku rzuty wszystkich punktów danego utworu płaskiego przypadają na ową prostą, którą osią rzutową (*die projectionsaxe*) zowiemy. Również i tutaj rozróżniamy rzuty środkowy i równoległy.

Jeżeli w rzucie równoległym rzucające są prostopadłe do osi, otrzymujemy rzut prostopadły czyli ortogonalny. Tylko o takim rzucie mówić będziemy w dalszym ciągu naszej rozprawki.

2. Rzutem punktu M na oś rzutową $X'X$ jest spodek m prostopadłej Mm , z tego punktu na oś wykreśloną (fig. 1.).

3. Rzutem odcinka AB linii prostej na oś rzutową $X'X$ jest albo linija prosta ab (fig. 2. i 3.) albo też punkt a (fig. 4.). W ostatnim przypadku dana prosta jest prostopadłą do osi rzutowej $X'X$.

4. Każda prosta AB ma dwa kierunki wprost sobie przeciwne. Jeden kierunek idzie od A do B , który oznaczamy przez (AB) ; w tym razie punkt A jest początkiem danej prostej. Drugi zaś kierunek, przeciwny tamtemu, idzie od B do A , który wyrażamy przez (BA) ; tutaj punkt B jest początkiem danej prostej.

5. Te obydwa kierunki należy przyjąć także dla osi rzutowej.

Jeżeli kierunek rzutu danej prostej zgadza się z dodatnim kierunkiem osi rzutowej, rzut téj prostej jest dodatni; jeżeli zaś z odjemnym kierunkiem osi rzutowej, to jest odjemny.

Rzuty, którym nadajemy kierunek zawisły od kierunku osi rzutowej, zwiemy algebraicznymi (*algebraische projectionen*).

6. Aby oznaczyć, czy rzut danego odcinka linii prostej jest dodatnim, czy też odjemnym, należy nasamprzód wyznaczyć dodatni kierunek osi rzutowej i przyjąć jeden punkt skrajny danej prostej, rzucić się mającój, za początek, drugi zaś za koniec.

Jeżeli $X'X$ (fig. 2.) jest dodatnim kierunkiem osi rzutowej, a punkt A początkiem danej prostej AB , to jój rzut ab jest dodatnim; jeżeli zaś punkt B przyjmujemy za początek prostej BA , to jój rzut ba jest odjemny, gdyż jest przeciwny dodatniemu kierunkowi osi rzutowej $X'X$.

7. **Twierdzenie.** Dwa odcinki proste, jednakowo nachylone do osi rzutowej, są wprost proporcjonalne do swych rzutów.

Dowód. Dane są dwa odcinki proste MN i PR (fig. 5.); punkty skrajne M i P są ich początkami; zatym ich rzuty mn i pr są dodatnie. Kąty nachylenia tych odcinków względem osi $X'X$ znajdziemy, wykreśliwszy przez początek każdego z odcinków równoległą do osi $X'X$. Ponieważ:

$$\triangle MSN \sim \triangle PTR,$$

przeto:

$$\frac{MN}{MS} = \frac{PR}{PT},$$

czyli:

$$\frac{MN}{mn} = \frac{PR}{pr}. \quad \text{C. b. d. o.}$$

8. Dany odcinek linii prostej rzucić możemy na dwie osi rzutowe, do siebie prostopadłe. W takim razie otrzymujemy dwa rzuty, o których wypowiedzieć możemy następujące twierdzenie:

Rzut danego odcinka na jedną z dwu osi prostopadłych równa się różnicy rzucających na drugą oś rzutową.

Albowiem (fig. 6.):

$$a'b' = CB = Bb'' - Cb'',$$

czyli:

$$a'b' = Bb'' - Aa'';$$

podobnież:

$$a''b'' = Aa' - Bb'.$$

9. Jeżeli rzut mn (fig. 7.) danego odcinka prostego MN na oś rzutową $X'X$ rzucimy na tenże odcinek MN , lub jego przedłużenie, otrzymamy rzut $m'n'$, który zowiemy rzutem wstecznym danego odcinka (*die rückprojection*).

10. **Twierdzenie.** *Rzut główny danego odcinka prostego jest średnią geometrycznie proporcjonalną między danym odcinkiem prostym a jego rzutem wstecznym.*

Do w ó d. Wykreśliwszy (fig. 7.):

$$\begin{array}{l} \text{i} \quad \begin{array}{l} MS \parallel X'X \\ mT \parallel m'N, \end{array} \end{array}$$

otrzymujemy dwa trójkąty podobne, MNS i Tmn . Z podobieństwa tychże wynika:

$$\frac{MN}{MS} = \frac{mn}{mT},$$

czyli:

$$\frac{MN}{mn} = \frac{mn}{m'n'}.$$

Oznaczywszy odpowiednio przez a , a' , a'' długości odcinków Mn , mn , $m'n'$, mieć będziemy:

$$\frac{a}{a'} = \frac{a'}{a''},$$

czyli:

$$a'^2 = a.a''. \quad \text{C. b. d. o.}$$

11. **Twierdzenie.** Jeżeli dany odcinek prosty rzucimy na dwie osi prostopadłe, a otrzymane rzuty na dany odcinek prosty, to suma obu rzutów wstecznych równa się danemu odcinkowi.

Dowód. Osi $X'X$ i $Y'Y$ stoją na sobie prostopadłe w O (fig. 8.). Dany odcinek prosty MN rzucamy na obie osi i otrzymujemy jego rzuty mn i $m'n'$; rzuty zaś wsteczne są $m''n''$ i $m'''n'''$. Udowodnić mamy, że:

$$m''n'' + m'''n''' = MN.$$

W tym celu przenieśmy początek układu osi O do punktu M i przesunmy nowe osi $MX_1 \parallel OX$ i $MY_1 \parallel OY$; w takim razie Mn_1 jest rzutem danego odcinka MN na oś MX_1 , a Mn_1'' wstecznym jego rzutem; następnie Mn_1' jest rzutem tegoż odcinka MN na oś MY_1 , a Mn_1''' jego rzutem wstecznym. Wskutek tego wielkość rzutów wcale się nie zmieni. Z figury bowiem okazuje się, że:

$$\begin{aligned} Mn_1 &= mn, \\ Mn_1' &= m'n'; \end{aligned}$$

jakotóż łatwo okazać, że:

$$\begin{aligned} Mn_1'' &= m''n'', \\ i \quad Mn_1''' &= m'''n''' = n_1''N, \end{aligned}$$

wskutek tego:

$$\begin{aligned} m''n'' + m'''n''' &= Mn_1'' + Mn_1''' \\ &= Mn_1'' + n_1''N \\ &= MN. \end{aligned} \quad \text{C. b. d. o.}$$

12. Połóżmy:

$$\begin{aligned} MN &= a, \quad mn = b, \quad m'n' = c, \\ m''n'' &= b', \quad m'''n''' = c', \end{aligned}$$

gdzie a, b, c, b', c' oznaczają długości odpowiednich odcinków prostych; natenczas według ust. 10. otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a.b' &= b^2, \\ a.c' &= c^2. \end{aligned}$$

Zatym:

$$a(b' + c') = b^2 + c^2,$$

a że na podstawie ust. 11.:

$$b' + c' = a,$$

przeto:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

t. zn.: kwadrat wystawiony na danym odcinku prostym równa się sumie kwadratów wystawionych na obu jego rzutach. Jest to znane twierdzenie Pitagorasa.

13. Twierdzenie. *Rzut wielokąta zamkniętego jest zero na wszelkiej osi.*

Dowód. Niech będzie dany wielokąt $ABCDEF$ zamknięty jakikolwiek (fig. 9.); rzucmy go na oś $X'X$; natenczas punkty a, b, c, d, e, f są odpowiednimi rzutami wierzchołków jego A, B, C, D, E, F . Załóżmy, że kierunek dodatni osi wskazuje ($X'X$) i że punkt ruchomy, wychodząc z A , obiega obwód w kierunku strzałek i powraca do A ; natenczas rzut jego na $X'X$ opisuje rzuty wszystkich boków wielokąta. Te rzuty są dodatnie albo odjemne, według tego, czy punkt ruchomy bieży w kierunku dodatnim, czy też odjemnym osi. Dodatnimi są: ab, bc, de ; odjemnymi zaś: cd, ef, fa . Zatem suma algebraiczna wszystkich rzutów na oś $X'X$ jest zero, jakiegokolwiek ma ta oś położenie.

II. Wyprowadzenie wzorów goniometrycznych i trygonometrycznych.

1. Dane są dwie, na sobie prostopadle stojące osi rzutowe $X'X$ i $Y'Y$ (fig. 10.), przecinające się w punkcie O , na które rzucamy odcinki proste. Oś $X'X$ nazywamy główną (*die hauptaxe*), oś $Y'Y$ boczną (*die nebenaxe*); skutkiem tego rzut na oś główną nazwiemy rzutem głównym (*die hauptprojection*), a na oś boczną rzutem bocznym (*die nebenprojection*).

2. Stosunek rzutów do rzuconego odcinka prostego zależy od kąta, jaki tenże odcinek prosty tworzy z osią główną. Przy wyznaczaniu kąta nachylenia danego odcinka prostego do osi głównej, należy uwzględnić dodatni kierunek tak osi rzutowej, jak mającego się rzucić odcinka prostego.

3. Kąt ów możemy w dwojaki sposób wyznaczyć: a) przez początek mającego się rzucić odcinka prostego kreślimy równoległą do dodatniego kierunku osi głównej; albo b) przedłużamy dany odcinek prosty aż do spotkania się z osią rzutową.

Niech będzie dany odcinek prosty MN (fig. 10.); skrajność M jego początkiem, oś OX dodatnią, a $MP \parallel OX$; natenczas dany odcinek MN z główną osią rzutową $X'X$ tworzy kąt $\hat{P}MN$, albo $\hat{X}MN$, obadwa równe sobie jako kąty odpowiednie.

Gdy dany jest odcinek prosty MN (fig. 11.), a punkt M jest jego początkiem, natenczas wyrysowawszy $MP \parallel OX$, jakoteż przedłużwszy MN aż do spotkania się z główną osią rzutową, otrzymamy kąt $\hat{P}MN = \hat{X}ON'$, jaki dany odcinek prosty MN tworzy z osią główną rzutową.

4. Niech będzie dany odcinek prosty MN (fig. 12.), odniesiony do układu osi rzutowych prostokątnych YOX ; obierzmy na nim punkty $A, B, C, D, \dots$ i szukajmy rzutów odcinków $AB, BC, CD, \dots$ na obydwu osiach; więc ich rzuty główne są: $ab, bc, cd, \dots$, a rzuty boczne: $a'b', b'c', c'd', \dots$.

Rzut główny i boczny pozostają do rzuconego odcinka w pewnym, oznaczonym stosunku. Ten stosunek zależy tylko od wielkości kąta, który dodatni kierunek odcinka tworzy z dodatnim kierunkiem osi głównej. Otóż te stosunki zowiemy funkcjami goniometrycznymi lub kątowymi (*goniometrische funktionen od. winkelfunktionen*).

Kąt, który dodatni kierunek odcinka prostego tworzy z osią rzutową, zowiemy także kątem rzutowym (*der projectionswinkel*). Dopóki kąt ten się nie zmienia, to rzuty z odcinkiem rzuconym tworzą zawsze tensam stosunek, niezależny od wielkości odcinka rzuconego. Albowiem:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \dots,$$

jakotéz:

$$\frac{a'b'}{AB} = \frac{b'c'}{BC} = \frac{c'd'}{CD} = \dots$$

5. Oznaczmy rzucony odcinek MN (fig. 13.) przez k , rzut główny mn przez a , boczny $m'n'$ przez b , a kąt, który tworzy dodatni kierunek MN z dodatnim kierunkiem osi rzutowej OX , przez α ; natenczas nazwiemy:

a) stosunek rzutu głównego rzutu a do odcinka rzuconego k dostawą kąta α , co piszemy:

$$\frac{a}{k} = \text{dosta} = \cos \alpha \text{ (cosinus);}$$

β) stosunek rzutu bocznego b do odcinka rzuconego k wstawą kąta α , co piszemy:

$$\frac{b}{k} = \text{wsta} = \sin \alpha \text{ (sinus);}$$

γ) stosunek rzutu bocznego b do rzutu głównego a danego odcinka prostego k styczną kąta α , co piszemy:

$$\frac{b}{a} = \text{sta} = \tan \alpha \text{ (tangens).}$$

6. Odwróciwszy powyższe stosunki, otrzymamy dalsze trzy funkcje katowe, tj. sieczną, dosieczną i dotyczną; a więc:

$$\alpha) \frac{k}{a} = \text{sieczy} = \sec \alpha \text{ (secans);}$$

$$\beta) \frac{k}{b} = \text{dosiecz} \alpha = \text{cosec} \alpha \text{ (cosecans)};$$

$$\gamma) \frac{a}{b} = \text{dotyczna} = \text{ctg} \alpha \text{ (cotangens)}.$$

7. Związki między funkcjami kątowymi tegoż samego kąta.

a) Ponieważ :

$$\sin \alpha = \frac{b}{k},$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{k},$$

przeto :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + a^2}{k^2},$$

a że podług ust. I. 12.:

$$a^2 + b^2 = k^2,$$

więc :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

b) Ponieważ :

$$\sec \alpha = \frac{k}{a},$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{b}{a},$$

przeto :

$$\sec^2 \alpha - \text{tg}^2 \alpha = \frac{k^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

czyli :

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha. \quad (2)$$

c) Ponieważ :

$$\text{cosec} \alpha = \frac{k}{b},$$

$$\text{ctg} \alpha = \frac{a}{b},$$

przeto :

$$\text{cosec}^2 \alpha - \text{ctg}^2 \alpha = \frac{k^2 - a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1,$$

czyli :

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha. \quad (3)$$

d) Ponieważ :

$$\sin \alpha = \frac{b}{k},$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{k},$$

przeto :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{k} : \frac{a}{k} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha;$$

jakotóż :

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{a}{k} : \frac{b}{k} = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

zatem mamy :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (4)$$

i

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

e) Ponieważ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a},$$

więc :

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{b};$$

a że :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b},$$

przeto :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (6)$$

jakotóż :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}. \quad (7)$$

f) Ponieważ :

$$\cos \alpha = \frac{a}{k},$$

więc:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{k}{a};$$

a że:

$$\sec \alpha = \frac{k}{a},$$

przeto:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (8)$$

g) Ponieważ:

$$\sin \alpha = \frac{b}{k},$$

więc:

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{k}{b};$$

a że:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{k}{b},$$

przeto:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (9)$$

U w a g a. Jeżeli jedna z funkcji goniometrycznych danego kąta jest wiadomą, można zapomocą wzorów (1)–(9) wyznaczyć wszystkie inne.

8. *Znaki funkcji goniometrycznych.*

a) Dostawa i sieczna są dodatnie albo odjemne, stosownie do tego, czy rzut główny jest dodatni, czy też odjemny. Zatym, jak to łatwo rysunkiem wykazać, funkcje te są dodatnie dla kątów większych od 0^0 a mniejszych od R , i większych od $3R$ a mniejszych od $4R$. Dla kątów zaś większych od R a mniejszych od $3R$, funkcje te są odjemne.

b) Wstawa i dosieczna są dodatnie albo odjemne, stosownie do tego, czy rzut boczny jest dodatni, czy też odjemny. Dla wszelkich kątów większych od 0^0 a mniejszych od $2R$, są te dwie funkcje dodatnie, a dla kątów większych od $2R$ a mniejszych od $4R$, są odjemne.

c) Styczna i dotyczna są dodatnie, gdy rzuty główny i boczny mają zgodne znaki (albo dodatnie, albo odjemne); są zaś odjemne, gdy oba te rzuty są znaków niezgodnych (tj. dodatni i odjemny, albo odjemny i dodatni). Zatym styczna i do-

tyczna są dodatnie dla wszelkich kątów większych od 0^0 a mniejszych od R , i większych od $2R$ a mniejszych od $3R$. Jeżeli zaś kąty są większe od R a mniejsze od $2R$, jakoteż większe od $3R$ a mniejsze od $4R$, to obie funkcje są ujemne.

9. *Graniczne wartości liczebne funkcji goniometrycznych.*

a) Dla dostawy i wstawy.

α) Jeżeli mający się rzucić odcinek prosty MN jest równoległy do osi głównej, a kierunki obu tych prostych są zgodne, to rzut główny równa się danemu odcinkowi, więc $k=a$.—W tym przypadku kąt, jaki tworzy dany odcinek prosty z osią główną, jest 0^0 ; więc:

$$\begin{aligned}\cos 0^0 &= \frac{a}{k} = \frac{k}{k} = 1, \\ \cos 0^0 &= +1.\end{aligned}\quad (10)$$

β) Dany odcinek prosty stoi atoli prostopadle do osi bocznej, a rzut jego boczny $b=0$; więc w tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned}\sin 0^0 &= \frac{b}{k} = \frac{0}{k} = 0, \\ \sin 0^0 &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

γ) Jeżeli kierunek mającego się rzucić odcinka prostego, równoległego do osi głównej, jest przeciwny kierunkowi osi głównej, natenczas 1) $a=-k$, 2) kąt, jaki tworzy dany odcinek z osią główną, wynosi 180^0 , 3) rzut boczny $b=0$. Zatem otrzymamy:

$$\begin{aligned}\cos 180^0 &= \frac{a}{k} = \frac{-k}{k} = -1, \\ \cos 180^0 &= -1;\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sin 180^0 &= \frac{b}{k} = \frac{0}{k} = 0, \\ \sin 180^0 &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

δ) Jeżeli mający się rzucić odcinek prosty MN stoi prostopadle do osi głównej, to główny jego rzut $a=0$.—W tym przypadku kąt, jaki odcinek prosty tworzy z osią główną, wynosi 90^0 albo 270^0 , stosownie do tego, czy kierunki odcinka prostego i osi bocznej są zgodne, czy też niezgodne; rzut zaś boczny $b=+k$, albo $b=-k$. Zatem otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\cos 90^0 &= \cos 270^0 = \frac{a}{k} = \frac{0}{k} = 0, \\ \cos 90^0 &= \cos 270^0 = 0;\end{aligned}\quad (14)$$

$$\sin 90^{\circ} = \frac{b}{k} = \frac{+k}{k} = +1,$$

$$\sin 90^{\circ} = +1; \quad (15)$$

$$\sin 270^{\circ} = \frac{b}{k} = \frac{-k}{k} = -1,$$

$$\sin 270^{\circ} = -1. \quad (16)$$

W podobny sposób znajdziemy, że:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 0^{\circ} &= 0; & \operatorname{ctg} 0^{\circ} &= +\infty; \\ \operatorname{tg} 90^{\circ} &= +\infty; & \operatorname{ctg} 90^{\circ} &= 0; \\ \operatorname{tg} 180^{\circ} &= 0; & \operatorname{ctg} 180^{\circ} &= -\infty; \\ \operatorname{tg} 270^{\circ} &= -\infty; & \operatorname{ctg} 270^{\circ} &= 0; \end{aligned} \quad (17)-(18)$$

jakotóż:

$$\begin{aligned} \sec 0^{\circ} &= +1; & \operatorname{cosec} 0^{\circ} &= +\infty; \\ \sec 90^{\circ} &= +\infty; & \operatorname{cosec} 90^{\circ} &= +1; \\ \sec 180^{\circ} &= -1; & \operatorname{cosec} 180^{\circ} &= -\infty; \\ \sec 270^{\circ} &= -\infty; & \operatorname{cosec} 270^{\circ} &= -1. \end{aligned} \quad (19)-(20)$$

Uwaga. Widzimy z powyższych obliczeń, że bezwzględna wartość wstawy i dostawy leży między granicami $+1$ i -1 ; stycznėj i stycznėj między $-\infty$ i $+\infty$; siecznėj i dosiecznėj między $-\infty$ i -1 a między $+1$ i $+\infty$.

10. Szczególne wartości funkcij goniometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° .

a) Dla kąta 45° .

Niech odcinek prosty $MN = k$ (fig. 14.) tworzy z osią $X'X$ kąt $\alpha = 45^{\circ}$; a jego rzuty niech będą $mn = a$ i $m'n' = b$; natenczas według ust. I. 12. możemy napisać:

$$k^2 = a^2 + b^2,$$

a że, jak z figury się okazuje, $a = b$, przeto:

$$k^2 = 2b^2;$$

stąd:

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ czyli: } \frac{b}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

ponieważ:

$$\frac{b}{k} = \sin 45^{\circ},$$

przeto :

$$\left. \begin{array}{l} \sin 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \text{Podobnie znajdziemy, że:} \\ \cos 45^{\circ} = \frac{a}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{b}{a} = 1, \\ \operatorname{ctg} 45^{\circ} = \frac{a}{b} = 1, \\ \sec 45^{\circ} = \frac{k}{a} = \sqrt{2}, \\ \operatorname{cosec} 45^{\circ} = \frac{k}{b} = \sqrt{2}. \end{array} \right\} \quad (21)$$

b) *Dla kąta 60°.*

Niech odcinek prosty $MN = k$ (fig. 15.) tworzy z osią główną $X'X$ kąt $\alpha = 60^{\circ}$, a jego rzuty niech będą $mn = a$ i $m'n' = b$; natenczas:

$$\cos 60^{\circ} = \frac{a}{k},$$

a że :

$$a = \frac{k}{2},$$

więc :

$$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Ponieważ :

$$k^2 = a^2 + b^2,$$

czyli :

$$k^2 - \frac{k^2}{4} = b^2,$$

czyli :

$$\frac{3}{4} k^2 = b^2,$$

stąd :

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

a że :

$$\frac{b}{k} = \sin 60^{\circ},$$

więc :

$$\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Podobnie znajdziemy, że

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 60^{\circ} &= \sqrt{3}, \\ \operatorname{ctg} 60^{\circ} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sec 60^{\circ} &= 2, \\ \operatorname{cosec} 60^{\circ} &= \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

c) Dla kąta 30° .

Niech dany odcinek prosty $MN = k$ (fig. 16.), tworzy z osią główną $X'X$ kąt $\alpha = 30^{\circ}$, a jego rzuty niech będą $mn = a$, $m'n' = b$; natenczas:

$$k^2 = a^2 + b^2,$$

a że, jak to z figury się okazuje,

$$b = \frac{k}{2},$$

przeto :

$$k^2 - \frac{k^2}{4} = a^2,$$

czyli :

$$\frac{3}{4} k^2 = a^2,$$

stąd :

$$\frac{a}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

a że :

$$\frac{a}{k} = \cos 30^{\circ},$$

przeto :

$$\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (24)$$

Ponieważ:

$$\sin 30^0 = \frac{b}{k},$$

a że:

$$b = \frac{k}{2},$$

więc:

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}.$$

Podobnie znajdziemy, że:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 30^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} 30^0 &= \sqrt{3}, \\ \sec 30^0 &= \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{cosec} 30^0 &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

11. *Odjemne kąty.* Jeżeli za dodatnie kąty uważamy takie kąty, jakie ramię ruchome $M'N$ tworzy z stałą osią rzutową $X'X$, obracając się około stałego punktu M' w lewo, to za odjemne uważać należy kąty powstające wskutek obrotu ramienia ruchomego w przeciwnym kierunku, tj. w prawo (fig. 17.).

Jeżeli kąt $X\hat{M}'N = +\alpha$, to kąt $X\hat{M}'N_1 = -\alpha$. W tym przypadku rzuty główne są sobie równe i zgodnych znaków, a rzuty boczne równe, ale znaków niezgodnych. Stąd wypływa, że, skoro:

$$\cos \alpha = \frac{a}{k},$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{a}{k},$$

przeto:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha. \quad (26)$$

Następnie, skoro:

$$\sin \alpha = \frac{b}{k},$$

$$\sin(-\alpha) = -\frac{b}{k},$$

przeto:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad (27)$$

Podobnie znajdziemy, że :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha, \\ \sec(-\alpha) &= \sec\alpha, \\ \operatorname{cosec}(-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Widzimy zatem, że dostawa i sieczna kąta ujemnego są tymisamymi, co dostawa i sieczna kąta dodatniego; wszystkie inne funkcje goniometryczne kąta ujemnego równają się odpowiednim funkcjom kąta dodatniego, ale są znaku ujemnego.

12. *Dopełnienia kątów.* Dwa kąty wzajem się dopełniające (*complementwinkel*) wyrażamy przez α i $90^\circ - \alpha$.

Niech będą dane dwie osi $X'X$ i $Y'Y$, prostopadle w O na sobie stojące (fig. 18.); niech dany odcinek prosty $OM = k$ tworzy z osią główną $X'X$ kąt $\hat{M}OX = \alpha$; natenczas kąt $\hat{MOY} = 90^\circ - \alpha$. Rzuty danego odcinka prostego są $Om = a$ i $Om' = b$; natenczas :

$$\frac{b}{k} = \sin\alpha,$$

$$\frac{a}{k} = \cos\alpha.$$

Przyjmijmy teraz oś $Y'Y$ za oś główną, a oś $X'X$ za boczną, natenczas b stanie się rzutem głównym, a zaś rzutem bocznym danego odcinka prostego OM , którego kąt nachylenia do osi głównej $Y'Y$ wynosi $(90^\circ - \alpha)$. Więc napisać możemy, że:

$$\frac{b}{k} = \cos(90^\circ - \alpha),$$

$$\frac{a}{k} = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Z porównania powyższych równań wynikają relacje :

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha. \end{aligned} \right\}$$

Podobnie otrzymamy :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \sec(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{cosec}\alpha, \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) &= \sec\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

13. *Spełnienia kątów.* Dwa kąty wzajem się spełniające (*supplementwinkel*) wyrażamy przez α i $180^\circ - \alpha$.

Niech będą dane dwie osi $X'X$ i $Y'Y$, prostopadłe w O na sobie stojące (fig. 19.); niech dany odcinek prosty $OM = k$ tworzy z dodatnią osią główną OX kąt $\hat{MOX} = \alpha$; natenczas kąt $\hat{MOX'} = 180^\circ - \alpha$. Rzuty danego odcinka prostego są $Om = a$ i $Om' = b$; natenczas:

$$\frac{b}{k} = \sin \alpha,$$

$$\frac{a}{k} = \cos \alpha.$$

Przyjmijmy teraz oś OX' za dodatnią; natenczas rzut główny a odcinka prostego OM będzie ujemnego znaku, tj. $Om = -a$; boczny zaś rzut jego $Om' = b$ pozostanie niezmienny. Ze względu na tę oś OX' i kąt $180^\circ - \alpha$, możemy ustawić relacje:

$$\frac{b}{k} = \sin (180^\circ - \alpha),$$

$$\frac{-a}{k} = \cos (180^\circ - \alpha).$$

Porównawszy powyższe zrównania, otrzymujemy:

$$\left. \begin{array}{l} \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \\ \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha; \\ \text{podobnie:} \\ \begin{array}{l} \text{tg } (180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha, \\ \text{ctg } (180^\circ - \alpha) = -\text{ctg } \alpha, \\ \text{sec } (180^\circ - \alpha) = -\text{sec } \alpha, \\ \text{cosec } (180^\circ - \alpha) = \text{cosec } \alpha. \end{array} \end{array} \right\} \quad (30)$$

Widzimy zatem, że wstawa i dosieczna danego kąta są względnie tymisamymi, co wstawa i dosieczna kąta spełniającego; pozostałe zaś funkcyje goniometryczne danego kąta są równe odpowiednim funkcyjom kąta spełniającego, ale są znaku odjemnego.

14. *Dwa kąty, których różnica wynosi 90° .* Takie dwa kąty wyrażamy przez α i $90^\circ + \alpha$.

Podstawmy we wzorach (29) $+\alpha$ za $-\alpha$ i $-\alpha$ za $+\alpha$, to bacząc na ust. 11. tego rozdziału, otrzymamy:

$$\left. \begin{array}{l} \sin (90^\circ + \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha, \\ \cos (90^\circ + \alpha) = \sin (-\alpha) = -\sin \alpha, \end{array} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg} (-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha, \\ \operatorname{ctg} (90^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \\ \sec (90^\circ + \alpha) &= \operatorname{cosec} (-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha, \\ \operatorname{cosec} (90^\circ + \alpha) &= \sec (-\alpha) = \sec \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

15. Dwa kąty, których różnica wynosi 180° . Takie dwa kąty wyrażamy przez α i $180^\circ + \alpha$. Użyjmy powyższego podstawienia we wzorach (30), a bacząc na ust. 11. tego rozdziału, otrzymamy następujące relacje:

$$\left. \begin{aligned} \sin (180^\circ + \alpha) &= \sin (-\alpha) = -\sin \alpha, \\ \cos (180^\circ + \alpha) &= -\cos (-\alpha) = -\cos \alpha, \\ \operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} (-\alpha) = \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{ctg} (180^\circ + \alpha) &= -\operatorname{ctg} (-\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sec (180^\circ + \alpha) &= -\sec (-\alpha) = -\sec \alpha, \\ \operatorname{cosec} (180^\circ + \alpha) &= \operatorname{cosec} (-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

16. Na podstawie ust. 10. i ust. 12.—15. możemy z łatwością wyznaczyć liczebne wartości funkcji goniometrycznych dla kątów 120° , 135° , 150° i t. d. Np.:

$$\sin 120^\circ = \sin (90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \cos (90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$$

$$\sec 150^\circ = \sec (90^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{cosec} 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\begin{aligned} \sin 600^\circ &= \sin (360^\circ + 240^\circ) = \sin 240^\circ = \sin (180^\circ + 60^\circ) = \\ &= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (-1000^\circ) &= -\operatorname{tg} 1000^\circ = -\operatorname{tg} (2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) = \\ &= -\operatorname{tg} 280^\circ = -\operatorname{tg} (180^\circ + 100^\circ) = -\operatorname{tg} 100^\circ = \\ &= -\operatorname{tg} (180^\circ - 80^\circ) = \operatorname{tg} 80^\circ \end{aligned}$$

i t. d.

17. Następująca tabliczka przedstawia wartości funkcji goniometrycznych dla pewnych kątów, obliczone na podstawie poprzednich ustępów.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tangens	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotangens	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
secans	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosecans	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

18. Jeżeli MN (fig. 13.) jest danym odcinkiem prostym, odniesionym do układu osi prostokątnych, jego rzuty są $mn = a$ i $m'n' = b$, a kąt nachylenia danego odcinka do osi $X'X$ jest α , natenczas, jak wiadomo, mamy:

$$\frac{a}{k} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{k} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Z równań tych otrzymujemy relacje:

$$\text{jakotéz:} \quad \left. \begin{aligned} a &= k \cdot \cos \alpha, \\ a &= b \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \\ b &= k \cdot \sin \alpha, \\ b &= a \cdot \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

t. zn.: α) rzut główny danego odcinka prostego równa się temuż odcinkowi pomnożonemu przez dostawę kąta rzutowego; albo:

β) rzut główny danego odcinka prostego równa się boczemu jego rzutowi pomnożonemu przez dotyczną kąta rzutowego;

γ) rzut boczny danego odcinka prostego równa się temuż odcinkowi pomnożonemu przez wstawę kąta rzutowego; albo:

δ) rzut boczny danego odcinka prostego równa się głównemu jego rzutowi pomnożonemu przez styczną kąta rzutowego.

Ponieważ przyprostokątne trójkąta prostokątnego należy uważać za rzuty główny i boczny przeciwprostokątnej, przeto powyższe twierdzenia wysłowić możemy w sposób następujący:

α) każda przyprostokątna równa się przeciwprostokątnej pomnożonej przez wstawę kąta przeciwległego lub dostawę kąta przyległego;

β) każda przyprostokątna równa się drugiej przyprostokątnej przez styczną kąta przeciwległego lub dotyczną kąta przyległego.

Na powyższych twierdzeniach i twierdzeniu Pitagorasa, jako na twierdzeniach zasadniczych, opiera się rozwiązanie trójkątów prostokątnych.

19. *Wzory Möbiusa.* Oznaczmy proste, na których leżą boki $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ danego trójkąta (fig. 20.), przez f , g , h , a dowolną prostą w płaszczyźnie ABC przez p . Następnie przyjąwszy stałe dodatni kierunek obrotu i dodatnie kierunki prostych f , g , h , p , otrzymujemy tym samym co do znaków dokładnie wyznaczone odcinki proste i kąty danej figury, między którymi zachodzą następujące związki:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \cos (pf) + b \cdot \cos (pg) + c \cdot \cos (ph) &= 0, \\ a \cdot \sin (pf) + b \cdot \sin (pg) + c \cdot \sin (ph) &= 0, \\ a : b : c &= \sin (gh) : \sin (hf) : \sin (fg). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Dowód. Oznaczmy przez A_1 , B_1 , C_1 rzuty ortogonalne wierzchołków A , B , C na prostą p , natenczas podług ust. 18.:

$$A_1 B_1 = c \cdot \cos (ph),$$

$$C_1 A_1 = b \cdot \cos (pg),$$

$$B_1 C_1 = a \cdot \cos (pf).$$

Ponieważ (ust. I. 13.):

$$B_1 C_1 + C_1 A_1 + A_1 B_1 = 0,$$

przeto otrzymamy pierwszy z powyższych wzorów:

$$a \cdot \cos (pf) + b \cdot \cos (pg) + c \cdot \cos (ph) = 0.$$

Obróćmy prostą p o kąt 90° ; natenczas kąt (ph) przejdzie w $(ph - 90^\circ)$, a $\cos (ph)$ w $\cos (ph - 90^\circ) = \cos [-(90^\circ - ph)] =$

$= \cos(90^\circ - ph) = \sin(ph)$, i t. d. Skutkiem tego powyższy wzór przybierze postać następującą:

$$a. \sin(pf) + b. \sin(pg) + c. \sin(ph) = 0.$$

Nadajmyż prostej p takie położenie, aby raz zeszła się z prostą f , drugi raz z prostą g ; natenczas $\sin(ff) = (\sin gg) = 0$, a ostatnie równanie przejdzie w następujące:

$$b. \sin(fg) + c. \sin(fh) = 0,$$

$$\text{i} \quad a. \sin(gf) + c. \sin(gh) = 0;$$

stąd:

$$b. \sin(fg) = c. \sin(fh),$$

$$a. \sin(fg) = c. \sin(gh),$$

czyli:

$$\frac{a}{\sin(gh)} = \frac{b}{\sin(fh)} = \frac{c}{\sin(fg)}.$$

Oznaczywszy przez α, β, γ kąty wewnętrzne $B\hat{A}C, C\hat{B}A, A\hat{C}B$ trójkąta ABC , i zważywszy, że spełniają one kąty $(gh), (hf)$ i (fg) do $2R$, wskutek czego:

$$\sin(gh) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\sin(hf) = \sin\beta,$$

$$\sin(fg) = \sin\gamma,$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad (35)$$

t. zn.: *W każdym trójkącie prostokreślnym boki są proporcjonalne do wstaw kątów przeciwległych.*

Jestto tak zwane twierdzenie wstaw (*der sinussatz*), będące jednym z twierdzeń głównych, służących do rozwiązania trójkątów prostokreślnych. Wzory (35) zowią także wzorami Möbiusa.

Uwaga 1. Zapomocą powyższych wzorów można obliczyć dwa boki trójkąta, jeżeli dany jest trzeci bok z dwoma kątami.

Uwaga 2. W szczególnym przypadku, jeżeli jeden z kątów trójkąta jest prostym, np. $\alpha = R$, wzory powyższe zamieniają się na:

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{\cos\beta},$$

skąd otrzymujemy zrównania :

$$b = a. \sin \beta \quad \text{ i } \quad b = c. \operatorname{tg} \beta,$$

stanowiące właśnie dwa twierdzenia trójkąta prostokątnego (ob. ust. 18.).

20. *Wzory Möbiusa* wyrażają pewną własność trójkąta prostokreślnego, tj.: *Stosunek każdego boku do wstawy kąta temu bokowi przeciwległego jest liczbą stałą* (tj. równa się średnicy koła opisanego).

D o w ó d. Opiszmy na jakimkolwiek trójkącie ABC (fig. 21.) okrąg koła, wykreślmy średnicę AD i połączmy D z B . Ponieważ w trójkącie ADB kąt $\hat{A}BD = 90^\circ$, a kąt $\hat{ADB} = \hat{ACB} = \gamma$, mamy:

$$AB = AD. \sin \gamma,$$

$$c = 2R. \sin \gamma,$$

czyli:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

gdzie R oznacza promień koła opisanego. A zatem:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

C. b. d. o.

21. *Suma i różnica dwu kątów*. W ustępie 19. otrzymaliśmy równanie:

$$a. \cos (fp) + b. \cos (gp) + c. \cos (hp) = 0. \quad (34a)$$

Ponieważ podług ust. 19. i 20.:

$$\frac{a}{\sin (gh)} = \frac{b}{\sin (hf)} = \frac{c}{\sin (fg)} = 2R,$$

przeto:

$$a = 2R. \sin (gh),$$

$$b = 2R. \sin (hf),$$

$$c = 2R. \sin (fg),$$

co podstawivszy w równanie (34a), po obustronnym skróceniu przez $2R$, otrzymamy:

$$\sin (gh). \cos (fp) + \sin (hf). \cos (gp) + \sin (fg). \cos (hp) = 0,$$

Położmy kąty:

$$(fp) = \kappa, (gp) = \lambda, (hp) = \mu;$$

ponieważ:

$$(gh) = (gp) - (hp) = \lambda - \mu, *)$$

jakotóż:

$$(hf) = \mu - \kappa,$$

i

$$(fg) = \kappa - \lambda,$$

przeto dla trzech dowolnych kątów κ, λ, μ otrzymujemy:

$$\sin(\lambda - \mu) \cdot \cos \kappa + \sin(\mu - \kappa) \cdot \cos \lambda + \sin(\kappa - \lambda) \cdot \cos \mu = 0.$$

Podstawmy teraz:

$$\kappa = \alpha, \lambda = \beta, \mu = 0,$$

a otrzymamy:

$$\sin \beta \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

stąd:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad (36)$$

*) Mamy dwie proste f i g ; oznaczmy kąt przez nie utworzony przez (fg) , uważając f za ramię początkowe, g zaś za ramię końcowe. Natenczas:

$$(fg) = - (gf),$$

czyli:

$$(fg) + (gf) = 0.$$

Dane są trzy proste f, g, h , leżące w jednej płaszczyźnie; natenczas mamy:

$$(fg) + (gh) + (hf) = 0,$$

co także ma wtedy swą wartość, gdy owe proste nie przechodzą przez jedenże punkt.

Jeżeli przez punkt na płaszczyźnie wykreślimy proste f', g', h' , po kolei równoległe i zgodnie skierowane z prostymi f, g, h , to jasną jest, że $(f'g') = (fg)$, $(g'h') = (gh)$ i $(h'f') = (hf)$; zatem:

$$(fg) + (gh) + (hf) = (f'g') + (g'h') + (h'f').$$

Z tego wynika, że:

$$\begin{aligned} (fg) + (gh) &= - (hf) = (fh), \\ (fh) &= (gh) - (gf) = (fg) - (hg) \end{aligned}$$

i t. d.

Kładąc $+\beta$ za $-\beta$, będziemy mieli:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta. \quad (37)$$

Podstawiawszy zaś w obu tych wzorach $(90^\circ - \alpha)$ za α , otrzymamy:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \quad (38)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta. \quad (39)$$

22. Z tych wzorów możemy bardzo łatwo otrzymać $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ i $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ przy użyciu odpowiednich działań algebraicznych lub odpowiednich podstawień; a mianowicie:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}, \quad (40)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}. \quad (41)$$

Zakážmy, że w równaniach (37), (38), (40), (41) $\beta = \alpha$, wywieziemy z nich następujące:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha, \quad (42)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad (43)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad (44)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \quad (45)$$

Zapomocą tych wzorów wyznajduje się funkcyje podwójnego kąta, znając funkcyje pojedynczego, tj. położywszy w równaniach (42) i (43) α za 2α , zatym $\frac{\alpha}{2}$ za α , otrzymamy:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}, \quad (46)$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \quad (47)$$

Wiedząc, że:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{i} \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

otrzymujemy stąd, że:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (48)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad (49)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (50)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \quad (51)$$

Zapomocą tych wzorów obliczamy funkcye połowy kąta, znając dostawę całego kąta.

23. Przemiana sum i różnic funkcyj kątowych.

Równania (37) i (38) dają :

$$\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Jeżeli :

$$\alpha + \beta = \varphi, \quad \alpha - \beta = \psi,$$

to :

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \psi}{2},$$

więc :

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi + \sin \psi &= 2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, \\ \sin \varphi - \sin \psi &= 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \psi}{2}, \\ \cos \varphi + \cos \psi &= 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, \\ \cos \psi - \cos \varphi &= 2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \psi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

III. Rozwiązanie trójkątów prostokreślnych.

1. *Wzór Carnot'a.* Wzory służące do rozwiązania trójkątów prostokreślnych wyprowadzamy z jednego wzoru zasadniczego, znanego pod nazwą wzoru Carnot'a.

Odnosnie do fig. 20. w ust. II. 19. otrzymaliśmy:

$$a \cdot \cos (pf) + b \cdot \cos (pg) + c \cdot \cos (ph) = 0. \quad (1)$$

Jeżeli dowolna prosta p zejdzie się po kolei z prostymi f , g , h , wzór (1) zamieni się na:

$$\left. \begin{aligned} a + b \cdot \cos (fg) + c \cdot \cos (hf) &= 0, \\ a \cdot \cos (fg) + b + c \cdot \cos (gh) &= 0, \\ a \cdot \cos (hf) + b \cdot \cos (gh) + c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Pomnożywszy pierwszy z tych wzorów przez $-a$, drugi przez b , trzeci przez c i dodawszy do siebie, znajdziemy:

$$-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos (gh) = 0.$$

Ponieważ:

$$\cos (gh) = -\cos \hat{BAC} = -\cos \alpha,$$

przeto otrzymamy pierwszy z trzech następujących wzorów:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

znanych pod nazwą wzoru Carnot'a (*der Carnotische lehrsatz*) i będących zasadniczymi w trygonometrii prostokreślniej.

Dwa ostatnie wzory otrzymamy, jeżeli po rozmnożeniu wzorów (2) względnie przez a , $-b$, c , lub przez a , b , $-c$, dodamy je do siebie i uwzględnimy, że:

$$\cos (hf) = -\cos \beta,$$

$$\cos (fg) = -\cos \gamma.$$

Wzory (3) wyrażają następującą własność trójkąta prostokreślnego: *Kwadrat wystawiony na jednym boku jest równy sumie kwadratów wystawionych na dwu innych bokach mniej podwójnym prostokątem wystawionym z tych dwu boków a pomnożonym przez dostawę kąta między nimi zawartego.*

W szczególnym przypadku, jeżeli jeden kąt trójkąta np. α jest prostym, pierwszy z wzorów (3) zamienia się na:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

co wyraża znane twierdzenie Pitagorasa (por. ust. I. 12.).

2. *Przekształcenie wzorów zasadniczych.* Z wzorów zasadniczych (3) wyznaczamy kąty trójkąta, gdy dane są jego boki. Wszelako, aby je obliczyć zapomocą logarytmów, należy namienione wzory stosownie przeinaczyć. W tym celu pierwszy z wzorów (3) daje:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Z tego równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \alpha &= \frac{a^2 - (b+c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}, \\ 1 + \cos \alpha &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s(s-a)}{bc}, \end{aligned} \quad (4)$$

pomnąc, że:

$$a + b + c = 2s,$$

a stąd:

$$b + c - a = 2(s - a),$$

$$a - b + c = 2(s - b),$$

$$a + b - c = 2(s - c).$$

Ponieważ według ust. II. 22. i wz. (48) i (49):

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

przeto wzory (4) przechodzą na następujące:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}.$$

Wyciągnawszy nareszcie z obu stron pierwiastek kwadratowy, otrzymamy dwa pierwsze z sześciu wzorów następujących:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, & \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \\ \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, & \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \\ \sin \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, & \cos \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.\end{aligned}\quad (5)$$

Z nich przez dzielenie otrzymujemy :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.\end{aligned}$$

Ponieważ :

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \quad (6)$$

gdzie r oznacza promień koła wpisanego w trójkąt ABC , trzy ostatnie wzory zamieniają się na :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{r}{s-a}, \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \frac{r}{s-b}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \frac{r}{s-c}.\end{aligned}\quad (7)$$

U w a g a. Dwie ostatnie pary wzorów (5) wynajdujemy tak samo z dwu ostatnich wzorów (3), jakieśmy pierwszą parę wyznaczili z pierwszego wzoru zasadniczego (3). We wszystkich tych wzorach należy wziąć pierwiastnik ze znakiem dodatnim, gdyż skoro żaden z kątów α, β, γ , nie przenosi $2R$, dostawy i wstawy połówek tych kątów są liczbami dodatnimi.

Zapomocą wzorów (6) i (7) wyznaczyć można kąty trójkąta, jeżeli jego boki są dane. Próbę rozwiązania stanowi wyrażenie $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

3. *Twierdzenie wstaw.* a) Odnosnie do fig. 20. w ust. II. 19. znaleźliśmy:

$$a \cdot \sin (pf) + b \cdot \sin (pg) + c \cdot \sin (ph) = 0,$$

z którego to wyrażenia otrzymaliśmy wzory:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \quad (8)$$

wyrażające tak zwane twierdzenie wstaw.

b) Wzory (8) wysnuwają się łatwo z wzorów zasadniczych (3). Baczac, że:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

i mnożąc przez siebie parami wzory (5), znajdziemy:

$$\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\sin \beta = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

z których to równań przez dzielenie bezpośrednio otrzymujemy:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma},$$

czyli:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (8)$$

Zapomocą tych wzorów można obliczyć dwa boki trójkąta, jeżeli dany jest trzeci bok z dwoma kątami (ob. ust. II. 19. uw. 1. i 2.).

4. *Twierdzenie stycznych.* Z wzorów (5) otrzymujemy przez mnożenie:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \frac{s-b}{c} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \frac{s-b}{c} \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \frac{s-a}{c} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \frac{s-a}{c} \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

jakotóż:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \frac{s-c}{c} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \frac{s-c}{c} \cdot \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \frac{s}{c} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \frac{s}{c} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Odjąwszy od siebie dwa pierwsze równania a dodawszy do siebie dwa ostatnie, znajdziemy:

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{c} \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a + b}{c} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Podzieliwszy te dwa równania przez siebie, mieć będziemy:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Ponieważ:

$$\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2},$$

przeto:

$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Zatym:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Taksamo znajdziemy:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{c - a}{c + a} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

(9)

Wzory (9) wyrażają własność trójkąta prostokreślnego, znaną p. n. twierdzenia stycznych, tj.: *Różnica dwu boków ma się tak do sumy tychże boków, jak styczna połowy różnicy kątów naprzeciwległych do stycznej połowy sumy tychże kątów.*

5. Zapomocą wzorów (9) można obliczyć dwa kąty trójkąta, jeżeli dane są dwa boki tym kątom przeciwległe i kąt między tymi bokami zawarty.

Albowiem, jeżeli są dane elementy a , b , γ , natenczas, pomnając, że $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, czyli $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, otrzymamy z pierwszego z wzorów (9) $\log. \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, a następnie $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Wiedząc zaś, że:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = m,$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = n,$$

znajdziemy:

$$\alpha = m + n,$$

$$\beta = m - n.$$

Bok trzeci c obliczymy przez zastosowanie twierdzenia wstaw.

6. *Powierzchnia trójkąta.* Pole trójkąta $\triangle$ wyznaczyć możemy sposobem następującym:

a) Wykreśliwszy $AD \perp BC$ (fig. 20.), mamy:

$$\triangle = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin ABC,$$

$$\triangle = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta,$$

podobnie znajdziemy:

$$\triangle = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma,$$

$$\triangle = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha,$$

(10)

t. zn.: *Powierzchnia trójkąta prostokreślnego równa się połowie iloczynu z dwu którychkolwiek boków przez wstawę kąta między nimi zawartego.*

b) Wszelako według ust. II. 20.:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Stąd wypływa:

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R},$$

$$\sin \beta = \frac{b}{2R},$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{2R};$$

skutkiem tego wzory (10) przeinaczają się na następujący :

$$\Delta = \frac{abc}{4R}, \quad (11)$$

t. zn.: *Powierzchnia trójkąta równa się iloczynowi z jego trzech boków podzielonemu przez poczwórny promień koła opisanego.*

c) Ponieważ :

$$\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2},$$

przeto pierwszy z wzorów (10) ze względu na drugie z wzorów (5) zamieni się na wzór :

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (12)$$

wyrażający powierzchnię trójkąta we funkcyi trzech jego boków.

d) Ponieważ :

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

przeto łącząc ten wzór z (12), otrzymamy :

$$\Delta = rs, \quad (13)$$

t. zn.: *Powierzchnia trójkąta równa się promieniowi koła wpisanego pomnożonemu przez połowę obwodu trójkąta.*

e) Ponieważ według wzoru (10) :

$$\Delta = \frac{ab}{2} \sin \gamma,$$

a że podług twierdzenia wstaw :

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha},$$

przeto :

$$\Delta = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}. \quad (14)$$

Powierzchnię trójkąta można wyrazić we funkcyi trzech kątów i jednego boku.

f) Ponieważ według wzoru (10.):

$$\triangle = \frac{ab}{2} \sin \gamma,$$

a według ust. II. 20.:

$$a = 2R \cdot \sin \alpha,$$

$$b = 2R \cdot \sin \beta,$$

urzęto:

$$\triangle = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma. \quad (15)$$

Powierzchnię trójkąta można wyrazić we funkcyi trzech kątów i promienia koła opisanego.

7. *Zebrańie.* Ażeby trójkąt prostokreślny rozwiązać, musi się między danymi elementami znajdować przynajmniej jeden bok. Wszystkie przypadki możebne sprowadzają się do czterech następujących:

- a) Jeżeli dane trzy boki a, b, c , znaleźć trzy kąty α, β, γ .
- b) Jeżeli dane dwa boki a, b i kąt między nimi zawarty γ , znaleźć dwa pozostałe kąty α, β i bok trzeci c .
- c) Jeżeli dane dwa boki a i b i kąt przeciwległy jednemu z tych boków, np. α , znaleźć dwa pozostałe kąty β i γ , tudzież bok trzeci c .
- 4) Jeżeli dany jeden bok i dwa kąty temu bokowi np. przyległe, znaleźć kąt trzeci i dwa pozostałe boki.

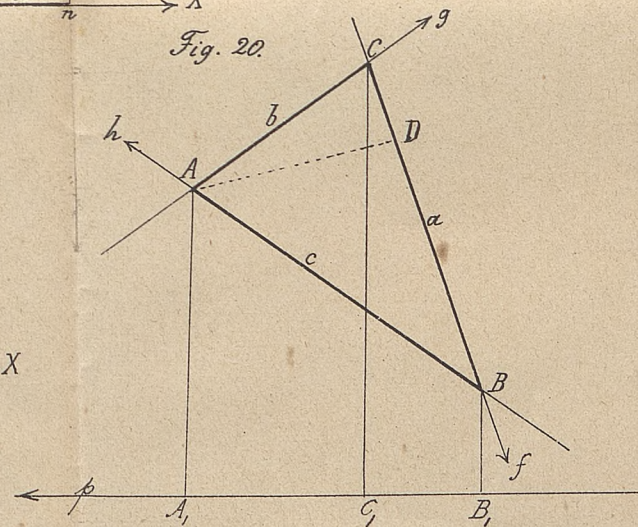
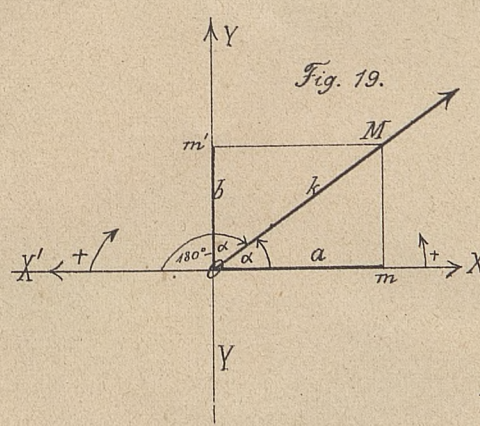
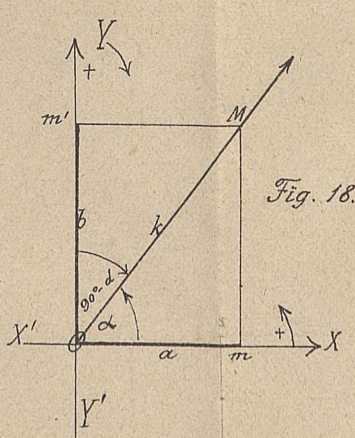
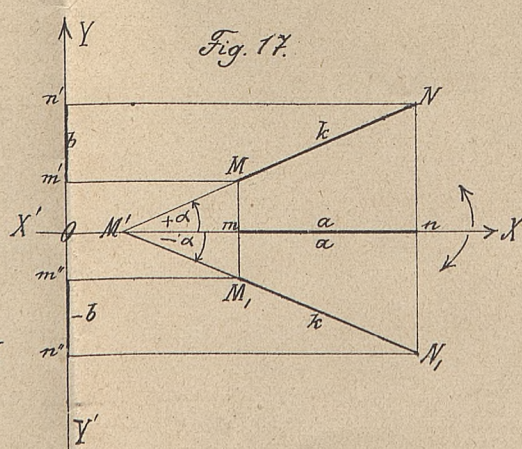
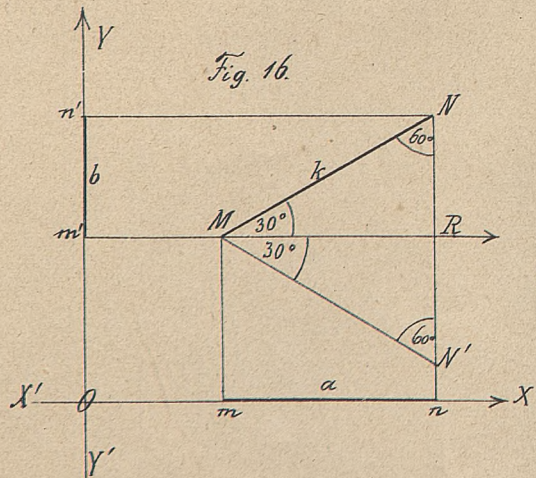
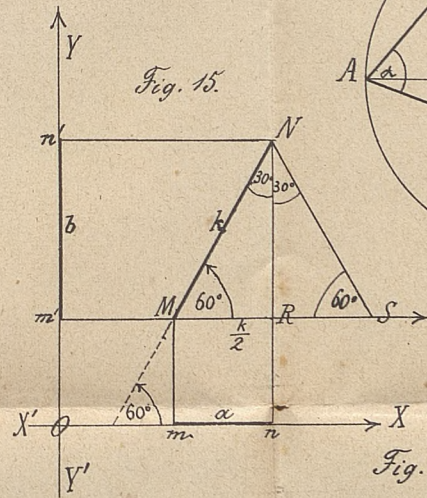
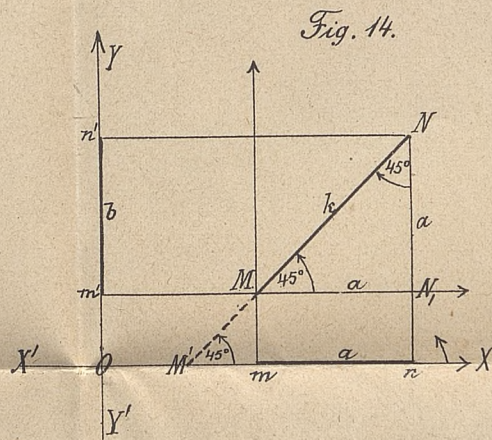
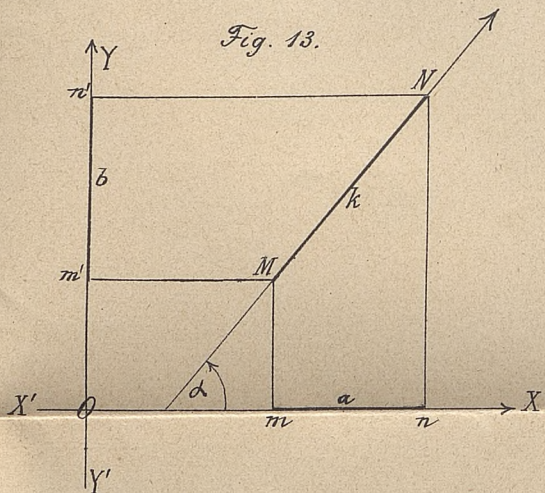
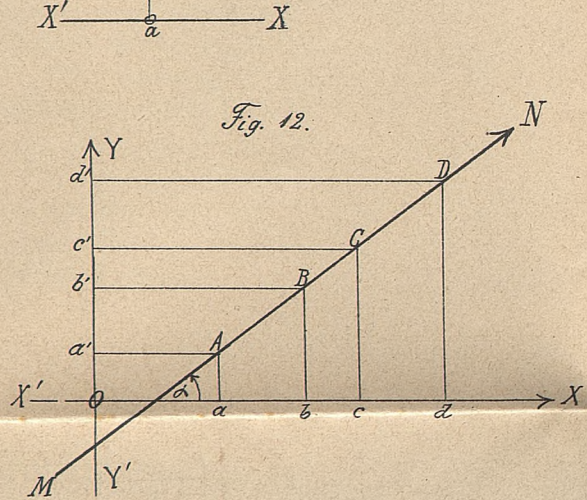
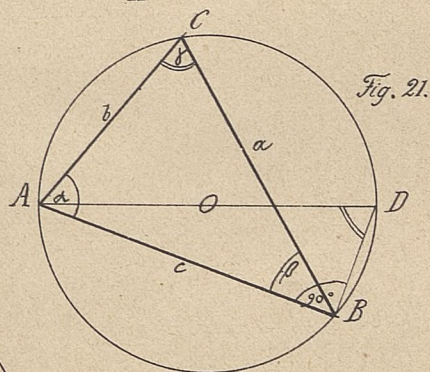
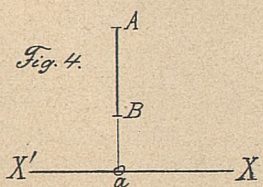
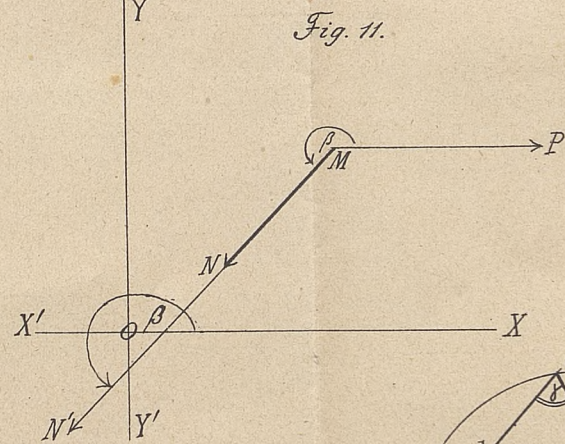
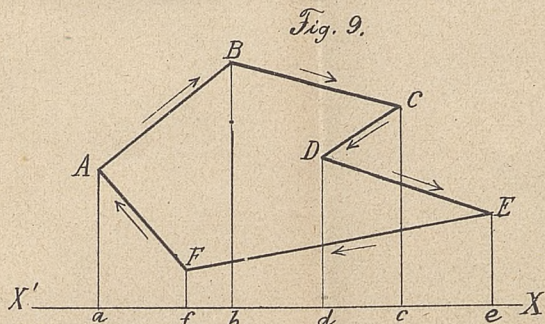
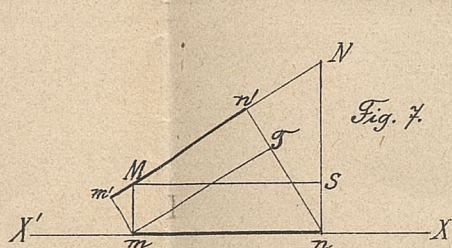
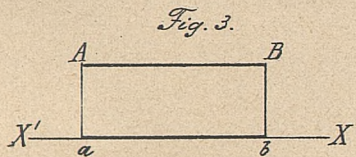
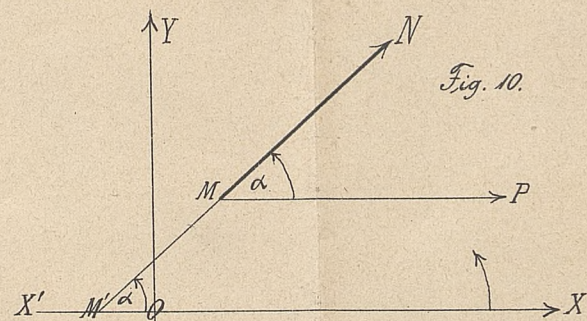
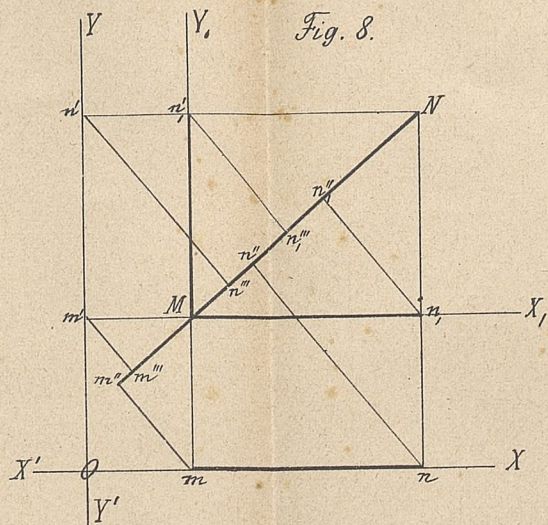
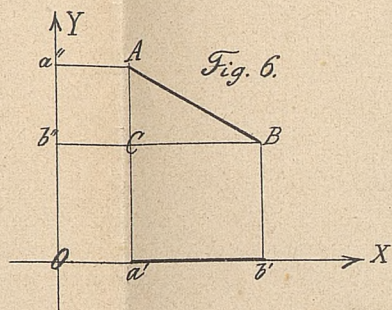
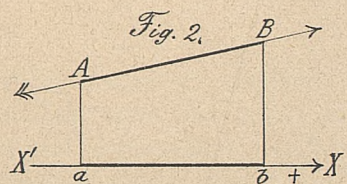
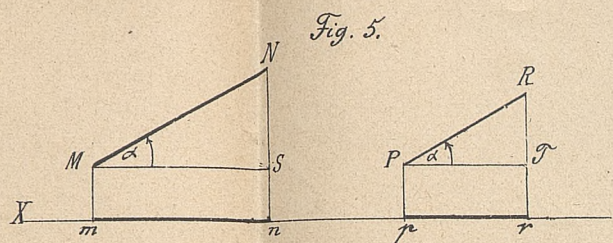
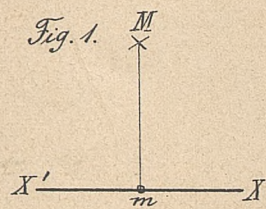
Wszystkie te zadania rozwiązują w zupełności wzory (6), (7), (8) i (9), jakto pokazuje następująca tablica:

Dane elementy	S z u k a n e e l e m e n t y	Powierzchnia	Wzory próbne
a, b, c	$s = \frac{a+b+c}{2}; \quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}.$	$\Delta = rs$	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
a, b, γ	$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = m; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = n;$ $\alpha = m + n, \quad \beta = m - n; \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$	$\Delta = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$	$c = a \cdot \cos \beta +$ $+ b \cdot \cos \alpha$
a, b, α	$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}; \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta); \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$	$\Delta = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$	$c = a \cdot \cos \beta +$ $+ b \cdot \cos \alpha$
a, β , γ	$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma); \quad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$	$\Delta = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$	$b = a \cdot \cos \gamma +$ $+ c \cdot \cos \alpha$

U w a g a. W przypadku drugim należy przez a rozumieć bok większy. — W przypadku trzecim może być $a < b$ lub $a > b$. Jeżeli $a < b$, to otrzymujemy dwie wartości na β możliwe, albowiem $\sin\beta$ należy do dwu kątów, z których jeden jest ostry, a drugi rozwarty. Jeżeli zaś $a > b$, to kąt β musi być ostrym, albowiem $\alpha > \beta$.

Jeżeli jeden kąt trójkąta jest prosty, np. $\alpha = 90^\circ$, wówczas do rozwiązywania trójkąta we wszystkich możebnych przypadkach wystarczą wzory (33. w ust. II. 18.) i twierdzenie Pitagorasa. W tym więc razie daje rozwiązanie następująca tablica:

Dane elementy		Szukane elementy	
a, b	$c = a \cdot \cos\beta, \sin\beta = \frac{b}{a}, \gamma = 90^\circ - \beta.$	$f = \frac{b^2}{2} \cdot \operatorname{ctg}\beta$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$
b, c	$a = \frac{b}{\sin\beta}, \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}, \gamma = 90^\circ - \beta.$	$f = \frac{b^2}{2} \cdot \operatorname{ctg}\beta$	$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$
a, β	$b = a \sin\beta, c = a \cos\beta, \gamma = 90^\circ - \beta.$	$f = \frac{a^2}{4} \cdot \sin^2\beta$	$b = c \cdot \operatorname{tg}\beta.$
b, β	$a = \frac{b}{\sin\beta}, c = b \operatorname{ctg}\beta, \gamma = 90^\circ - \beta.$	$f = \frac{b^2}{2} \cdot \operatorname{ctg}\beta$	$c = a \cdot \cos\beta.$



GRONO NAUCZYCIELI

przy końcu roku szkolnego.

1. **P. Ignacy Stawarski**, dyrektor.
2. **X. Jan Chełmecki**, dr. teologii, kan. hon. dyecezyi krakowskiej, prof., katecheta, z powodu słabości nauki nie udzielał.
3. **P. Wojciech Rypel**, profesor, uczył jęz. łać. w VII.; greck. w IVa.+b., VII.; — 17 godzin w tygodniu.
4. **P. Stanisław Siedlecki**, profesor, uczył jęz. łać. w IVb.; grec. w IIIa., VIII., prop. w VIII.; — 18 godzin w tygodniu.
5. **P. Leopold Świerż**, czł. kom. baln., sekr. Tow. tatrz., prof., zawiadowca biblioteki nauczycielskiej, gosp. V. kl., uczył jęz. greckiego w V., VIa.+b.; — 15 godzin w tygodniu.
6. **P. Teofil Ziomba**, doktor filozofii, docent Uniw. Jagiell., członek komisji filolog. Akad. Umiejętn. krak., profesor, uczył jęz. polsk. w Ic., IVa., VIa., VII., VIII.; prop. w VII.; — 17 godzin w tygodniu.
7. **X. Stanisław Nowiński**, profesor, katecheta i exhortator dla klas niższych, gosp. IVb. kl., uczył religii w niższém gimnazyum; — 22 godzin w tygodniu.
8. **P. Wincenty Stroka**, profesor, gosp. IVa., uczył języka łać. w Ia., IVa.; polskiego w VIb.; — 17 godzin w tygodniu.
9. **P. August Sokołowski**, dr. filoz., członek kom. hist. Ak. Um. krak., profesor, uczył historii powszechnej w IIb., VIa.+b., VII., VIII.; — 18 godzin w tygodniu.
10. **P. Jan Czubek**, czł. kom. jęz. Ak. Umiej. krak., profesor, gospodarz IIIc. kl., uczył języka łać. w Ic., IIIc., VIII.; — 19 godzin w tygodniu.

11. **P. Jan Molin**, dr. filozofii, prof., zawiadowca zbioru książek szkoln. dla uboższej młodz. wyższ. gimn., gospodarz klasy Ic., uczył jęz. niem. w kl. Ic., IIb, VII., VIII.; — 18 godzin w tygodniu.
12. **P. Juliusz Miklaszewski**, profesor, otrzymał trzymiesięczny urlop dla poratowania zdrowia.
13. **P. Franciszek Tomaszewski**, członek kom. egz. dla kandydatów do jednorocznej służby wojskowej, profesor, zawiadowca gabinetu fizycznego, uczył matem. w IIb., IIIb.; fizyki w IVa.+b., VII., VIII.; — 18 godzin w tygodniu.
14. **P. Władysław Kulczyński**, czł. i sekr. kom. fizyogr. Akad. Umiej. krak., profesor, zawiadowca gabinetu przyrodniczego, uczył matematyki w IIIa.+c., fizyki w IIIa.+b.+c.; hist. nat. w IIa., VIa.+b.; — 18 godzin w tygodniu.
15. **P. Teofil Krasnosielski**, dr. filoz., naucz., gosp. IIc. kl., uczył jęz. łać. w IIc., V.; polsk. w IIc.; — 17 godzin w tygodniu.
16. **P. Adolf Lewaj**, z. n., gosp. Ib. kl., uczył jęz. łać. w Ib., IIIb.; polsk. w Ib.; — 17 godzin w tygodniu.
17. **P. Bronisław Gustawicz**, czł. kom. fizyogr. i antropol. Ak. Umiej. krak., c. k. Tow. geogr. w Wiedniu i Londynie, rozpoznawca pisma przy c. k. Sądzie kraj. w Krak., z. n., gosp. VIII. kl., zawiadowca zbioru map. geogr. i czytelnia dla młodzieży niż. i wyż. gimn., uczył jęz. polsk. w IVb.; geogr. w Ia., IVa.; matem. w IIa.+c., V., VIII.; — 22 godzin w tygodniu.
18. **P. Ignacy Kranz**, z. n., gosp. VII. kl., uczył matem. w Ib., IVa.+b., VIa.+b., VII.; — 18 godzin w tygodniu.
19. **X. Karol Szałaśny**, z. n., katecheta i exhortator w klasach wyż., uczył religii w wyższym gimn.; — 10 godzin w tyg.
20. **P. Stanisław Klemensiewicz**, dr. fil., z. n., uczył matematyki w Ia.+c.; hist. nat. w Ia.+b.+c., IIb.+c., V.; — 18 godzin w tygodniu.
21. **P. Jan Leniek**, dr. filoz., z. n., gosp. kl. IIIb., zawiadowca zbioru książek szk. dla uboższej młodzieży niż. gimn., uczył jęz. polsk. w IIIa.+b.; hist. pow. i geogr. w IIa., IIIb.+c., IVb.; — 20 godzin w tygodniu.
22. **P. Juliusz Lachowicz**, z. n., gosp. kl. IIIa., uczył jęz. niem. w IIIa., hist. powsz. i geogr. w Ib.+c., IIc., IIIa., V.; — 20 godzin w tygodniu.

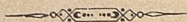
23. **P. Szymon Matusiak**, z. n., gosp. kl. IIb., uczył jęz. łać. w IIa.; polsk. w IIa.; niem. w IIa.; — 16 godzin w tyg.
24. **P. Józef Feichtinger**, z. n., uczył języka łać. w VIa.+b.; — 12 godzin w tygodniu.
25. **P. Józef Bielski**, z. n., gosp. Ia., uczył jęz. łać. w IIIa.; pols. w Ia., IIIc.; niem. w Ia.; — 18 godzin w tygodniu.
26. **P. Feliks Głowacki**, z. n., gosp. VIa., uczył jęz. niem. w IIIb., IVb., V., VIa.; — 17 godzin w tygodniu.
27. **P. Antoni Joniec**, z. n., gosp. VIb., uczył jęz. greck. w IIIc.; niem. w IIc., IVa., VIb.; — 18 godzin w tygodniu.
28. **P. Jan Ostoja Sędzimir**, z. n., gosp. kl. IIb., uczył jęz. łać. w IIb.; greck. w IIIb.; pols. w IIb., V.; — 19 godz. w tyg.
29. **P. Józef Limbach**, dr. filoz., z. n. uczył jęz. niem. w Ib., IIIc.; — 10 godzin w tygodniu.

Razem godzin obowiązkowych w tygodniu 449.

PRZEDMIOTY NADOBOWIĄZKOWE.

30. **P. Walery Eljasz**, nauczyciel nadetatowy, uczył rysunków; — 6 godzin w tygodniu.
31. **P. Wiktor Erard Ciechomski**, naucz. nadetatowy, uczył jęz. francuskiego; — 6 godzin w tygodniu.
32. **P. Kazimierz Bobek**, z. n. w c. k. III. gimn., uczył gimnastyki; — 6 godzin w tygodniu.
33. **P. Stanisław Klemensiewicz**, jak wyżej, uczył śpiewu; — 6 godzin w tygodniu.
34. **P. August Sokołowski**, jak wyżej, uczył dziejów kraju rodzinnego w VIa.+b., VII.; — 2 godziny, w tygodniu.
35. **P. Jan Leniek**, jak wyżej, uczył dziejów kraju rodzinnego w IIIb.+c., IVa.+b.; — 4 godziny w tygodniu.
36. **P. Juliusz Lachowicz**, jak wyżej, uczył dziejów kraju rodzinnego w IIIa.; — 1 godzinę w tygodniu.
37. **P. Bronisław Gustawicz**, jak wyżej, uczył kaligrafii w IIa.+b.+c.; — 2 godziny w tygodniu.
38. **P. Józef Bielski**, jak wyżej, uczył kaligrafii w Ia.+b.+c.; — 2 godziny w tygodniu.

Razem godzin nadobowiązkowych w tygodniu 35.



ROZKŁAD NAUK.

KLASA I.

Religia. 2 godz. tyg. Katechizm katolicki.

Język łaciński. 8 godz. tyg. Odmiana prawidłowa imion i czasowników; ważniejsze przyimki i spójniki; ćwiczenia w tłumaczeniu z polskiego na łaciński jęz. i odwrotnie. Memorowanie. Co tydzień zadanie szkolne ($\frac{1}{2}$ godz.); w 2. półroczu pisemne tłumaczenia na łac. i krótkie zadania domowe (co 7—14 dni).

Język polski. 3 godz. tyg. Nauka o częściach mowy odmiennych do liczebnika włącznie; o zdaniu pojedynczym i częściach tegoż; najważniejsze zasady głosowni i pisowni. Wyraziste czytanie objaśnionych ustępów tak prozaicznych, jak poetycznych. Uczenie się na pamięć celniejszych ustępów. Deklamacya. Co 14 dni zadanie domowe i szkolne na przemianę.

Język niemiecki. 6 godz. tyg. Odmiana rzeczowników, przymiotników, liczebników, zaimków; słowa posiłkowe i konjugacya słaba. Czytanie i tłumaczenie z niemieckiego na polski jęz. i odwrotnie. Uczenie się na pamięć celniejszych ustępów. Co tydzień zadanie szkolne.

Geografia. 3 godz. tyg. Pojęcia wstępne z geografii fizycznej i matematycznej. Podział mórz i stałego lądu. Części oceanów i mórz, przylądki, półwyspy, wyspy, cieśniny, przesmyki pięciu części ziemi. — Jeziora, rzeki, góry pięciu części ziemi. — Rasy ludzkie. Religia. Zarys geografii politycznej (z szczególniejszym uwzględnieniem Europy). Ćwiczenia kartograficzne.

Matematyka. 3 godz. tyg. (1 godz. arytmetyka, 1 godz. geometrya na przemianę). Z *arytmetyki*: System dziesiętny. Cztery główne działania z liczbami całkowitymi niemianowanymi i mianowanymi. Miary metryczne i wagi. Podzielność liczb. Najw. wsp. miara. Najmn. wsp. wielokrotność. Ułamki zwyczajne i dziesiętne. Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne i odwrotnie. Działania z liczbami wielogatunkowymi. Z *geometrii*: Linia prosta, koło, kąty i równoległoboki. Trójkąt (z opuszczeniem przystawania). Główne zagadnienia konstrukcyjne. Co lekcją ćwiczenie domowe; co 4 tyg. zadanie szkolne.

Historja naturalna. 2 godz. tyg. I. półr.: Ssawce i ważniejsze postacie z mięczaków i szkarłupniów. — II. półr.: Członkonogi i robaki.

KLASA II.

Religia. 2 godz. tyg. Dzieje starego zakonu.

Język łaciński. 8 godz. tyg. Nauka odmian nieprawidłowych z powtarzaniem materiału wziętego w kl. I. Uzupełnienie nauki o przyimkach i spójnikach. Ćwiczenia pisemne jak w I kl.

Język polski. 3 godz. tyg. Odmiana słowa. Nauka o zdaniu złożonym w połączeniu z interpunkcją. Czytanie wypisów, uczenie się na pamięć, deklamacya. Ćwiczenia pis. jak w kl. I.

Język niemiecki. 5 godz. tyg. Odmiana mocna słowa, odmiana słów zaimkowych i zwrotnych, nieregularnych; używanie słówka „zu“ przed bezokolicznikiem. Spójniki. Ćwicz. pis. jak w kl. I.

Historja. 2 godz. tyg. Dzieje starożytne ze szczególniejszém uwzględnieniem elementu biograficznego i powieściowego.

Geografia. 2 godz. tyg. Szczegółowa geografia fizyczna i polityczna Azji i Afryki. Poziomy i pionowy układ Europy, szczegółowa geografia Europy południowej. Powtórzenie i uzupełnienie nauki geografii matematycznej.

Matematyka. 3 godz. tyg. Z *arytmetyki*: Skrócone mnożenie i dzielenie. Stosunki i proporcye. Reguła trzech prosta. Z *geometrii*: Przystawanie trójkątów: zastosowanie tegoż; koło; czworobok; wielobok. Ćwiczenia i zadania jak w kl. I.

Historja naturalna. 2 godz. tyg. I. półr.: Ptaki, gady, płazy i ryby. II. półr.: Świat roślinny.

KLASA III.

Religia. 2 godz. tyg. Dzieje nowego zakonu.

Język łaciński. 6 godz. tyg. Z gramatyki (3 godz. tyg.): Powtórzenie materiału z klasy II.; składnia zgody i rzędu, przyimki z odpowiednimi przykładami. Czytanie i tłumaczenie (3 godz. tyg.) z Korneliusa Neposa wybranych żywotów. Co 14 dni zadanie szkolne i domowe.

Język grecki. 5 godz. tyg. Odmiana prawidłowa imion i czasowników, aż do czasowników na μ , z odpowiednimi ćwiczeniami ustnymi i pisemnymi. W II. półr. co 14 dni zadanie domowe, co 4 tyg. zadanie szkolne.

Język polski. 3 godz. tyg. Nieodmienne części mowy; składnia zgody i rzędu. Czytanie wypisów, uczenie się na pamięć; deklamacya. Co 14 dni zadanie domowe lub szkolne.

Język niemiecki. 4 godz. tyg. Składnia zgody, rzędu i szyku. Czytanie i rozbieranie zdań z odwoływaniem się do prawideł gramatycznych; opowiadanie przeczytanych kawałków, uczenie się na pamięć cenniejszych ustępów. Co 14 dni zadanie domowe lub szkolne.

Historja i geografia. 3 godz. tyg. (1 godz. historia, 1 godz. geografia na przemianę). Z *historji*: Dzieje średniowieczne sposobem biograficznym, z szczególniejszém uwzględnieniem faktów odnośnych do historii austriackiej. Z *geografji*: Powtórzenie i uzupełnienie geografji matematycznej. Szczegółowa geografia fizyczna i polityczna Europy środkowej, północnej i wschodniej (z wyjątkiem monarchji austr.-węg.), Ameryki i Australii.

Matematyka. 3 godz. tyg. Z *arytmetyki*: Rachowanie liczbami przybliżonymi. Cztery główne działania z liczbami ogólnymi całkowitymi i ułamkowymi. Potęgowanie. Pierwiastkowanie. Z *geometrii*: Równość powierzchni. Przemiana figur. Obliczanie obwodu i powierzchni. Podobieństwo figur. Ćwiczenia i zadania jak w kl. I.

Historja naturalna. 2 godz. tyg. I. półr.: Mineralogia. — II. półr. Fizyka: Ogólne własności ciał; stany skupienia; ciepło i początki chemii.

KLASA IV.

Religia. 2 godz. tyg. Nauka o ceremoniach i obrzędach Kościoła katolickiego.

Język łaciński. 6 godz. tyg. Z gramatyki (3 godz. tyg.): Nauka o trybach i czasach, imperativus, infinitivus, nomin. i accus. c. infin., oratio obliqua, supinum, gerundium, spójniki — w połączeniu z odpowiednimi ćwiczeniami ustnymi i pi-semnymi. Prozodya i metryka. Czytanie i tłómaczenie: Caesaris Comm. de Bello Gallico. Co 14 dni zadanie domowe, co 2—3 tyg. zadanie szkolne.

Język grecki. 4 godz. tyg. Odmiana czasowników na μ ; odmiany nieprawidłowe; najważniejsze rzeczy ze składni. Tłómaczenie z greckiego na polski jęz. i odwrotnie. Co 14 dni zadanie domowe, co 4 tyg. zadanie szkolne.

Język polski. 3 godz. tyg. Powtórzenie i uzupełnienie gramatyki w tym obrębie, w jakim jęz. w poprzednich klasach uczono, zwracając szczególną uwagę na te prawa, przeciw którym w potocznej mowie najczęściej wykraczamy. Ogólne zasady nauki o wierszowaniu i stylu. Czytanie wypisów. Deklamacya. Co 2 tyg. zadanie domowe lub szkolne.

Język niemiecki. 4 godz. tyg. Powtórzenie gramatyki, z szczególnem uwzględnieniem składni rzędu i zdań pobocznych. Czytanie z dokładnym rozbiorem rzeczy, opowiadanie i uczenie się na pamięć celniejszych ustępów, jakoteż tłómaczenie z polskiego na niemiecki język. Zadania jak w III. kl.

Historya i geografia. 4 godz. tyg. I. półr.: Historya nowożytna z szczególniejszém uwzględnieniem dziejów Austrii. — II. półr.: Szczegółowa geografia monarchii austro-węg. pod względem fizycznym i politycznym, z krótkim rysem dziejów austriackich.

Matematyka. 3 godz. tyg. Z *arytmetyki*: Zrównania 1. stopnia, reguła trzech złożona, rachunek procentu złożonego. Z *geometrii*: Wzajemne położenie linii prostych i płaszczyzn, kąty bryłowe, główne rodzaje brył, powierzchnia i objętość brył. Ćwiczenia i zadania jak w kl. I.

Fizyka. 3 godz. tyg. Mechanika, magnetyzm, elektryczność, akustyka, optyka, ciepło promieniste.

KLASA V.

Religia. 2 godz. tyg. Dogmatyka ogólna.

Język łaciński. 6 godz. tyg. Lektura (5 godz. tyg.): I. półr.: Liv. XXI. (1—51); II. półr.: Liv. XXII. (4—9, 44—54). Ovid. Metam. I. (89—162); II. (1—136); VI. (146—312), potop. Eleg. I. 3., IV. 10. — 1 godz. ćwiczeń gramatyczno-stylistycznych. Co miesiąc zadanie domowe i szkolne.

Język grecki. 5 godz. tyg. Lektura (4 g. tyg.): I. półr.: Z Chrestomatyi Schenkla: Anab. I.—V. — II. półr.: Hom. Il. I., II. i Xenof. Anab. VI. — Ćwiczenia gramatyczne (1 godz. tyg.). Co 4 tyg. zadanie domowe lub szkolne.

Język polski. 3 godz. tyg. Czytanie celniejszych ustępów z najważniejszych pomników literatury polskiej aż do Kochanowskiego, z historyczno-literackimi i gramatycznymi uwagami, podług wypisów Mecherzyńskiego. Oprócz tego czytano ustępy z Gallusa, Kadłubka i Długosza. Co 4 tyg. zadanie domowe lub szkolne.

Język niemiecki. 4 godz. tyg. Czytanie z wypisów z odpowiedniemi objaśnieniami gramatycznymi, stylistycznymi i estetycznymi. Ćwiczenia w opowiadaniu i uczenie się na pamięć celniejszych ustępów. Co 14 dni zadanie domowe lub szkolne.

Historia i geografia. 3 godz. tyg. Dzieje starożytne osobiście Greków i Rzymian do podboju Italii, przy ciągłym uwzględnieniu geografii. Historią rzymską wzięto do decemwiratu.

Matematyka. 4 godz. tyg. *Arytmetyka* (2 g. tyg.): Cztery główne działania. Odjemne i ułamkowe liczby. Własności liczb. Proporcye i ich zastosowanie. *Geometria* (2 godz. tyg.): Planimetria. Ćwiczenia i zadania jak w kl. I.

Historia naturalna. 2 godz. tyg. I. półr.: Mineralogia; II. półr.: Botanika.

KLASA VI.

Religia. 2 godz. tyg. Dogmatyka szczegółna.

Język łaciński. 6 godz. tyg. Lektura (5 g. tyg.). W oddz. a.: Sallust. Bell. Jugurth. (1—83); Verg. Aen. l. II.; Cicero Cat. I. w oddz. b.: Sallust. Bell. Jugurth. (1—70); Verg. Ecl. I.; Aen. l. I. (1—395); l. II. (199—566); Georg.; z l. II. lau-

des vitae rusticae. Cicero Cat. I. — 1 godz. tyg. ćwiczeń gram.-stylistycznych. Zadania jak w kl. V.

Język grecki. 5 godz. tyg. Lektura (4 godz. tyg.). W oddz. a.: Hom. Il. lib. II., IX., XXII.; Hom. Od. lib. IX., X.; Herodoti lib. VII. (1—86). — W oddz. b.: Hom. Il. lib. III., VI. (361—476), VII., IX., XXI.; Hom. Od. lib. IX., X.; Herod. lib. VII. (1—86). — 1 godz. tyg. ćwiczenia gramatyczne. Zadania jak w kl. V.

Język polski. 3 godz. tyg. Czytanie celniejszych ustępów z autorów złotego wieku literatury polskiej, z historyczno-literackimi, gramatycznymi i estetycznymi uwagami, z Wypisów Mecherzyńskiego. Oprócz tego czytano: Skargi Kazania Sejnowe; znaczne ustępy z Dworzanina Górnickiego i z kroniki J. Bielskiego.

Język niemiecki. 4 godz. tyg. Historia literatury niemieckiej od najdawniejszych czasów do Herdera włącznie; przycém czytano i rozbierano ustępy z wypisów Harwota. Zadania jak w kl. V.

Historia i geografia. 4 godz. tyg. Historia rzymska od podboju Italii do upadku cesarstwa wschodnio-rzymskiego i dzieje średniowieczne z szczególniejszém uwzględnieniem dziejów cesarstwa i papieństwa (aż do konkordatu wormackiego r. 1122).

Matematyka. 3 godz. tyg. *Z arytmetyki:* Potęgi, pierwiastki i logarytmy; zrównania pierwszego stopnia o jednej i kilku niewiadomych. *Z geometryi:* w I. półr. stereometria; w II. półr. trygonometria. Ćwiczenia i zadania jak w kl. V.

Historia naturalna. 2 godz. tyg. Zoologia w połączeniu z zasadami anatomii i fizjologii ludzkiej.

KLASA VII.

Religia. 2 godz. tyg. Etyka chrześcijańsko-katolicka.

Język łaciński. 5 godz. tyg. Lektura (4 godz. tyg.). I. półr.: Verg. Mar. Aen. I., II., XII.; II. półr.: M. T. Ciceronis or. pro Murena; Laelius sive de amicitia dialogus. — 1 godz. tyg. ćwiczeń gramatyczno-stylistycznych. Zadania jak w kl. V.

Język grecki. 4 godz. tyg. Lektura: I. półr.: Demostenesa Περὶ τὸν ἐν Χερσονήσῳ κατὰ Φιλίππου III. — II. półr.: Soph. Antigone. — 1 godz. ćwiczeń gram. Zadania jak w kl. V.

Język polski. 3 godz. tyg. Czytanie celniejszych ustępów z okresu panegiryczno-makaronicznego i stanisławowskiego w połączeniu z historyczno-literackimi uwagami, z Wypisów tomu II. części I. — W szczególności czytano: pierwsze trzy księgi „Wojny chocimskiej”; prócz tego znaczną część z Bajek i Satyr Krasickiego. Zadania jak w kl. V.

Język niemiecki. 4 godz. tyg. Historia literatury niemieckiej do końca XVIII. wieku. Czytano i rozbiérano według wypisów Harwota rzecz o Goethem i mniejsze poezye Schillera. Zadania jak w kl. V.

Historja i Geografia. 3 godz. tyg. Historia nowożytna do r. 1649.

Matematyka. 3 godz. tyg. *Z arytmetyki:* Zrównania kwadratowe i wykładnicze o jednej i kilku niewiadomych; zrównania nieoznaczone; szeregi; rachunek procentu składanego; nauka kombinacyj; dwumian Newtona. *Z geometryi:* Trygonometryczne zagadnienia, zastosowanie algebry do geometryi; geometrya analityczna w płaszczyźnie. Ćwiczenia jak w kl. V.

Fizyka. 3 godz. tyg. Mechanika. Ciepło. Chemia.

Logika. 2 godz. tyg.

KLASA VIII.

Religia. 2 godz. tyg. Historia kościelna.

Język łaciński. 5 godz. tyg. Lektura (4 godz. tyg.): W I. półr.: Horatii Flacci Carm.: I. 1. 3. 4. 7. 11. 22. 31. 34.; II. 3. 6. 7. 10. 14. 15. 20.; III. 1. 2. 3. 30.; IV. 3.; Sat. I. 1. 6.; Epist. I. 2., Epod. 2. — W II. półr.: C. Taciti Annalium I., II. i III. (1—18). — 1 godz. tyg. ćwiczeń gramatyczno-stylistycznych. Zadania jak w kl. V.

Język grecki. 5 godz. tyg. Lektura: W I. półr.: Sophoclis Ajax; w II. półr.: Platonis Apologia, Crito. — Ćwiczenia gramatyczne. Zadania jak w kl. V.

Język polski. 3 godz. tyg. Czytanie celniejszych ustępów z autorów ostatniego okresu lit. pol. w połączeniu z estetycznymi i historyczno-literackimi uwagami, z Wypisów tomu II. cz. II. W szczególności: wybór z pism Mickiewicza, Krasińskiego, Słowackiego i Pola. Zadania jak w kl. V.

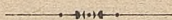
Język niemiecki. 3 g. tyg. Oprócz materiału zawartego w Wypisach wzięto Shakespeares Julius Caesar. Zadania jak w V. kl.

Historia i geografia. 3 godz. tyg. I. półr.: Szczegółowa historia austriacko-węg. monarchii. — II. półr.: Powtórzone dzieje starożytne; powtórzone i uzupełniono ogólne zasady geografii matem., oro- i hidrografią Europy; szczegółowy opis mon. austr. węg. z szczególném uwzględnieniem organizacyi politycznej i administracyjnej.

Matematyka. 2 godz. tyg. Powtórzenie nauki matematycznej; ćwiczenia w rozwiązywaniu zagadnień algebraicznych i geometrycznych. Zadania jak w kl. V.

Fizyka. 3 godz. tyg. Magnetyzm; elektryczność; nauka o ruchu falowym; akustyka; optyka; elementy astronomii.

Psychologia. 2 godz. tyg. Psychologia empiryczna.



Zadania polskie.

Klasa V.

1. Walna bitwa Polaków z Krzyżakami pod Grunwaldem (podług Długosza, XI s. a. 1410). — 2. Rynek krakowski (opis). — 3. Katedra na Wawelu (obraz). — 4. Oznaczyć postaci wierszowe i średniówkę we wstępie (10 w.) i zakończeniu (13 w.) Pana Tadeusza. — 5. Utwory opowiad.-opisowe; epopeja (podług zapisków szkolnych). — 6. Obchód pięciowiekowej rocznicy połączenia Litwy z Polską w gimn. św. Anny. — 7. 1) Określić rodzaj poprzedniego zadania i wykazać, że to kształt złożony w danym rodzaju utw. piśmienniczych. 2) Ułożyć rozkład treści. — 8. Bohdan Zaleski, wspomnienie pośmiertne. — 9. Charakterystyka charakterystyki (podług zap. szkolnych). — 10. Charakterystyka Hannibala (podług Liwiusa).

Klasa VIa.

1. Dlaczego tak wysoko cenimy treny Kochanowskiego? — 2. Znaczenie trybunatu w dziejach rzymskich. — 3. Charaktery-

styka głównych osób w IX. księdze Iliady. — 4. Zasługi Bolesława Wielkiego w dziejach narodu polskiego. — 5. Porównanie życia ludzkiego z żeglugą. — 6. „Juliusz Cezar“, charakterystyka historyczna. — 7. Wytrwałość jest koniecznym warunkiem powodzenia. — 8. „Prometeus“ (obrazek mitologiczny). — 9. Treść i zalety II. księgi Eneidy. — 10. Znaczenie Dworzanina Górnickiego w literaturze polskiej.

Klasa VIb.

1. Jakie były przyczyny rozpadnięcia się Grecyi na tak wielką ilość małych państw i jakim sposobem starali się Grecy zaradzić wypływającemu stąd rozdrobnieniu sił narodowych? — 2. O potrzebie kształcenia się w mowie ojczystej. — 3. O czytaniu książek. — 4. Charakterystyka Gaja Grakcha. — 5. Kwiat symbolem życia ludzkiego. — 6. Charakterystyka Maryusa. — 7. Jakim wpływom zawdzięcza Europa swoje korzystne stosunki klimatyczne. — 8. Osnowa poematu Wacława Potockiego: „Wojna chocimska“. — 9. Znaczenie morza Śródziemnego w ciągu dziejów. — 10. Jakie były powody wzrostu państwa Arabów za czasów Mahometa?

Klasa VII.

1. Zalety pierwszych dwóch ksiąg „Wojny chocimskiej“. — 2. Rycerstwo w wiekach średnich. — 3. „Per aspera ad astra“ (próbka powiastki). — 4. Homer i jego dzieła. — 5. Wartość czasu. — 6. Przyczyny wzrostu literatury za Stanisława Augusta. — 7. Porównanie Homera i Wergilego. — 8. Odezwa, zachęcająca do składek na rzecz pogorzalców Stryja. — 9. Dlaczego sławimy dzielność Batorego? — 10. Pokonywanie trudności jest najlepszym środkiem do wyrobienia siły fizycznej i moralnej.

Klasa VIII.

1. Stanowisko Brodzińskiego w literaturze polskiej. — 2. Stosunek Horacego do Mecenasas i Augusta. — 3. Charakterystyka Karola XII. — 4. Kolój żelazna jako jeden z najważniejszych wynalazków. — 5. Wykazać piękne strony Pana Tadeusza. —

6. Główne zalety Maryi Malczewskiego. — 7. Wartość zdrowia w życiu człowieka. — 8. Rozwój teatru w Grecyi starożytnéj. — 9. Charakterystyka dawnych Germanów.

Zadania niemieckie.

Klasa V.

1. Vergleichung der beiden Fabeln „Zeus und das Pferd“ und „Zeus und das Schaf“. — 2. Die Belagerung und Eroberung Sagunts (nach Liv. XXI). — 3. Die Kraniche des Ibykus (Nacherzählung). — 4. Der Löwe des Androkles (Nacherzählung). — 5. Der Winter (Eine Schilderung). — 6. Wie kam es zum 2. punischen Kriege? (nach Livius). — 7. Hannibals Zug über die Alpen (nach Livius). — 8. Der Graf von Habsburg (Nacherzählung). — 9. Die Burgschaft (Nacherzählung). — 10. Schilderung der Charybde nach Schillers Ballade „Der Taucher“. — 11. Die vier Weltalter (Schilderung nach Ovid). — 12. Der Kampf mit dem Drachen (Nacherzählung). — 13. Niobe (zu erzählen nach Ovid). — 14. Don Diego (nach Herders Cidromanzen). — 15. Die Bäume (Beschreibung). — 16. Cids Leben und Tod (nach Herders Cidromanzen).

Klasa VI.

1. Siegfrieds Jugend (zu erzählen nach der nordischen Sage). 2. Der Nibelungenhort und seine Bedeutung für die Entwicklung der Handlung im Nibelungenliede (mit Berücksichtigung der nordischen Sage). — 3. Wie wurde Parcival aus einem Unwürdigen ein Würdiger? — 4. und 5. Der Löwe des Androkles (Übungen in der indirecten Rede). — 6. Der Wert der Freundschaft (Chrie). 7. Irin. Ein Schäferidyll (zu bearbeiten nach dem gleichnamigen Fischeridyll Kleists). — 8. Gedankengang der Ode „Der Zürichersee“. — 9. Der Vogelsang oder die drei Lehren (Inhaltsangabe). — 10. Inhaltsangabe der Bürger'schen Ballade „Leonore“.

11. Die Exposition in Lessing's Minna von Barnhelm. — 12. Charakter des Majors von Tellheim. — 13. Die Katastrophe in Lessings Emilia Galotti. — 14. Laokoon (nach Vergil). — 15. Die Hauptarten des Dramas.

Klasa VIb.

1. „Arbeit ist des Bürgers Zierde,
Segen ist der Mühe Preis“ (zu erläutern). — 2. Siegfried's letztes Jagdvergnügen. — 3. Allerseelentag. — 4. Wie greift Hartmuth in die Handlung des Gudrunliedes ein? — 5. Die Bedeutung der Wälder. — 9. „Die Milchfrau“. Inhalt und Grundgedanke. — 7. „Mit Gräsern zu einem Stricke gewunden,
Wird auch der Elephant gebunden“. — 8. Johann der muntere Seifensieder (nach Hagedorn). — 9. Der Strom, ein Bild des menschlichen Lebens. — 10. Hauptgedanken der beiden Oden Klopstocks: „Die Etats généraux“ und „Mein Irrthum“. — 11. Lebensschicksale Hüons (nach Wielands Oberon I). — 12. Die Vorfabel des Lessingschen Lustspiels: „Minna v. Barnhelm“. — 14. Der Traum des Aeneas über Hektor (dane przez pana Dyrektora). — 15. Inhaltsangabe des Schillerschen Dramas: „Wilhelm Tell“. — 16. Laokoon (nach Vergil's Aeneis II. 199—235).

Klasa VII.

1. Goethes „Adler und Taube“. Inhalt und Grundgedanke. 2. Gang der Handlung in Goethes „Iphigenie auf Tauris“. — 3. Charakter der Goetheschen Iphigenie. — 4. Schauplatz der Handlung in „Hermann und Dorothea“. — 5. Der Apotheker aus „Hermann und Dorothea“. — 6. Exposition in Goethes „Tasso“. — 7. Inhalt des zwölften Buches der Aeneis. — 8. Gang der Handlung in Goethes „Faust“. — 9. Lust und Liebe sind die Fittige zu groszen Thaten. Goethe. — 10. Gedankengang in Schillers „Lied von der Glocke“.

11. Gefährlich ist's den Leu zu wecken,
Verderblich ist des Tigers Zahn;
Jedoch der schrecklichste der Schrecken,
Das ist der Mensch in seinem Wahn. Schiller. — 12. Das Leben auf dem Lande und in der Stadt. Nach Schillers „Spaziergang“. — 13. Der Ackerbau — der Anfang der Cultur. Nach

Schillers Eleusischem Fest. — 14. Wohltätig ist des Feuers Macht. Schiller.

Klasa VIII.

1. „In den Ocean schiff mit tausend Masten der Jüngling;
Still, auf gerettetem Boot treibt in den Hafen der Greis“.
Schiller. — 2. Lessings „Emilia Galotti“ und Schillers „Cabale und Liebe“. — 3. Die Exposition zu „Wallensteins Tod“. — 4. Mens agitat molem. Vergil. — 5. Der Charakter Wallensteins aus „Wallensteins Tod“. — 6. Inhalt des Prologes zur „Jungfrau von Orléans“. — 7. Die Krisis in „Wilhelm Tell“. — 8. Warum ist nicht Goethe, sondern Schiller der Lieblingsdichter der Jugend?
9. „Im engen Kreis verengert sich der Sinn,
Es wächst der Mensch mit seinen gröszern Zwecken“.
Schiller. — 10. „Der Edle lebt noch nach dem Tode fort,
Und ist so wirksam, als er lebte“. Goethe.

ZADANIA MATURYZCNE.

1. *Zadanie łacińsko-polskie.* Horatii Carm. I. 24.
2. *Zadanie polsko-łacińskie.* Przełożyć na język łaciński ustęp z Wypisów polskich dla klasy III.: „Mikołaj Kopernik“ od słów: „W dwudziestym szóstym roku...“ do słów: „Warmii nie zawołał“ (str. 91).
3. *Zadanie greckie.* Plato, Protagoras, 2.
4. *Zadanie polskie.* Nil sine magno vita labore dedit mortalibus.
5. *Zadanie niemieckie.* Die weltgeschichtliche Bedeutung Athens und Roms.
6. *Zagadnienie matematyczne.* a) $x^{\left(\frac{x}{8}\right)^8 \log x} = 3^{\frac{41}{404}}$
b) Rozwiązać trójkąt, w którym $a = 35.42$ m., $b = 42.15$ m., $c = 29.64$ m.
c) Pod jaką szerokością geograficzną leży ten równoleżnik ziemi, którego płaszczyzna dzieli oś ziemską podług proporcji ciągłej?

Wykaz książek, które w roku szk. 1887. używane będą:

Religia. W I. kl.: Katechizm Szustera przez ks. Zielińskiego; w II. kl.: Dzieje starego zakonu przez ks. Dąbrowskiego; w III. kl.: Dzieje nowego zakonu przez ks. Dąbrowskiego; IV. kl.: Liturgia ks. Wł. Jachimowskiego; w V. kl.: Introdukeya do Pisma św. przez ks. Jachimowskiego; w VI. kl.: Dogmatyka przez ks. Jachimo skiego; w VII. kl.: Etyka przez ks. Soleckiego; w VIII. kl.: Historia kościelna przez ks. Jachimowskiego.

Język łaciński. A) Gramatyka w I., II., III., IV., V. i VI. klasie: Samolewicza, we wszystkich innych klasach Poplińskiego. B) Ćwiczenia w I. kl.: Samolewicza część I.; w II. kl.: Samolewicza część II.; w III. kl.: Przykłady Próchnickiego; w IV. kl.: Poplińskiego na Quartę; w V. kl.: Ćwiczenia Jerzykowskiego dla klas średnich, część I.; w VI. kl.: tegoż część II.; w VII. i VIII. kl.: Próchnickiego. W kl. III.: Cornelius Nepos, wydanie Patočki; w IV. kl.: Caesaris Commentarii de Bello Gallico, edidit J. Prammer.

Język grecki. Gramatyka i ćwiczenia we wszystkich klasach Samolewicza.

Uwaga: Autorów łac. i greckich (kl. V.—VIII.) poda się na początku roku szkolnego.

Język polski. A) Gramatyka we wszystkich klasach niższego gimnazjum Małeckiego (r. 1882.). B) Wypisy w klasach I. do IV.: tomy I. do IV.; w kl. V. i VI.: Mecherzyńskiego; w kl. VII.: Wypisy, tom II., część I.; w kl. VIII.: Wypisy, tom II., część II.

Język niemiecki. A) Gramatyka w I.—IV. kl.: Molina. B) Wypisy w I. i II. kl.: Molina; w III. i IV. kl.: Hamerskiego; w V. kl.: Hamerskiego część I.; w VI. kl.: Wypisy Harwota, tom I.; w VII. i VIII. kl.: Harwota część II.

Historja. W II. kl.: Sawczyńskiego Dzieje starożytne; w III. kl.: średniowieczne; w IV. kl.: nowsze; w V.—VIII.: Markiewicza.

Geografia. W I. kl.: Benoniego (wyd. 2.); w II. i III. kl.: Baranowskiego i Dziedzickiego (wyd. 2.). W I. kl.: atlas Haardt-Gustawicz, w II.—IV. i VIII. kl. atlas Kozenn-Gustawicz.

Arytmetyka. W I. i II. kl.: Bączalskiego dla klas niższego gimnazjum część I.; w III. i IV. część II. przez Grzybowskiego i Bączalskiego; w V.—VIII. kl.: Moćnika, przez Bodyńskiego.

Geometrya. W niższych klasach Moćnika, przez Sternala; w wyższych Moćnika przez Staneckiego.

Historja naturalna. W I. kl. i I. półr. II. kl.: Zoologia obrazowa Nowickiego, wyd. V.; w II. półr. II. kl.: Botanika Rostafińskiego (w razie aprobaty); w III. kl. w I. półr.: Mineralogia Kłęska; w V. kl. I. półr.: Mineralogia Łomnickiego; II. półr.: Botanika Rostafińskiego (w razie aprobaty); w VI. kl.: Zoologia Nowickiego.

Fizyka. W III. kl. w II. półr. i w IV. kl.: Soleskiego; w VII. i VIII. kl.: Soleskiego; chemia Tomaszewskiego.

Propedeutyka. Logika Kremiera. Psychologia Crügera przez Sawczyńskiego.



STATYSTYKA UCZNIÓW.

Uwaga. Liczby mniejsze po prawej stronie w górze umieszczone oznaczają liczbę uczniów prywatnych.

K l a s a	Suma																																															
I	a	b	c	II	a	b	c	III	a	b	c	IV	a	b	V	a	b	VI	a	b	VII	VIII																										
a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b		a	b		a	b		a	b	VII	VIII																								
4. Liczba uczniów.																																																
Przy końcu roku szk. 1885																																																
Na początku roku szk. 1886																																																
W ciągu roku wstąpiło																																																
491	422	472	528	524	384	438	471	383	372	331	354	373	331	354	373	331	354	373	331	354	373	331	354	373	331																							
Razem przyjęto uczniów																																																
I. Obcych:																																																
a) z promocyj																																																
b) repetentów																																																
II. Naszych:																																																
a) z promocyj																																																
b) repetentów																																																
W ciągu roku wystąpiło																																																
10	8	7	402	324	292	312	321	331	262	30	464	26	24	441	26	24	441	26	24	441	26	24	441	26																								
121	5	3	4	9	3	6	6	14	2	6	4	122	3	3	8	—	944	—	—	—	—	—	—	—																								
Liczba uczniów z końcem roku szk. 1886																																																
37	372	442	483	434	354	373	331	373	312	35	464	27	27	441	31	59223	31	59223	31	59223	31	59223	31	59223																								
Miedzy tymi było:																																																
a) publicznych																																																
b) prywatnych																																																
37	37	44	48	43	35	37	33	37	31	35	46	27	27	44	31	592	29	29	44	31	592	29	29																									
—	2	2	3	4	4	3	1	3	2	—	4	—	—	—	—	29	—	—	—	—	—	—	—																									
2. Według miejsca urodzenia.																																																
I. Monarchia austro-węg.																																																
17	14	13	14	13	121	9	9	91	10	10	152	5	8	9	8	1754	8	1754	8	1754	8	1754	8	1754																								
1	41	5	3	61	2	42	2	3	2	3	3	1	3	2	3	451	2	451	2	451	2	451	2	451																								
16	13	20	191	20	162	201	18	231	141	12	201	15	15	261	14	2817	14	2817	14	2817	14	2817	14	2817																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	—	—	—	—	—	—																								
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	3	—	—	—	—	—	—																								
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—	—																								
II. Cesarstwo niemieckie.																																																
—	1	—	01	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	41	1	41	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	01	01	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
III. Cesarstwo rosyjskie.																																																
1	4	41	6	3	41	4	31	11	21	7	6	4	1	31	3	566	3	566	3	566	3	566	3	566																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—	—																								
—	11	01	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	52	52	—	—	—	—	—	—	—																								
—	372	442	483	434	354	373	331	373	312	35	464	27	27	441	31	59223	31	59223	31	59223	31	59223	31	59223																								
Do przedstawienników																																																
3. Według języka ojczystego było:																																																
37	372	442	483	434	354	373	331	373	312	35	464	27	27	441	31	59223	31	59223	31	59223	31	59223	31	59223																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																								
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—																															

	K l a s a																								Suma		
	I				II				III				IV				V				VI					VII	VIII
	a		b		c		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c						
	a	b	a	b	a	b																a	b	a			
7. Klasyfikacya.																											
a) Z końcem roku szk. 1886.																											
I. stopień z odznaczeniem																											
I. stopień																											
Do egzaminu poprawczego przypuszczono																											
II. stopień																											
III. stopień																											
Do egzaminu uzupełniającego przypuszczono																											
Uczniów nadawczych																											
Razem																											
b) Odnosnie do roku szk. 1885.																											
Do egzaminu poprawczego przypuszczono																											
Egzaminu poprawczy złożyło																											
Egzaminu popr. nie złożyło (lub doń się nie zgłosiło)																											
a) Ostateczny zatem wynik klasyfikacyi za rok 1885.																											
I. stopień z odznaczeniem																											
I. stopień																											
II. stopień																											
III. stopień																											
Razem																											
8. Opłata szkolna.																											
a) Płatno szkolne cate:																											
w I. półroczu																											
w II. półroczu																											
b) Od połowy było uwolnionych:																											
w I. półroczu																											
w II. półroczu																											
c) Od całego szkol. było uwoln.																											
w I. półroczu																											
w II. półroczu																											
d) Szkolna opłata wynosiła:																											
w I. półroczu																											
w II. półroczu																											
Razem																											
e) Taksy wstępne wynosiły:																											
f) Na zbiory naukowe																											
g) Taksy za wydane duplikaty świadectw szkolnych																											
Razem																											

oddział II.																													
b) Rysunki (3 oddziały)	7	11	12	13	13	13	11	8	6	10	2	5	8	4															
c) Gimnastyka (3 oddziały)	27	26	28	30	30	24	25	9	17	6	9	11	16	3															
d) Spiew (2 oddziały)	7	8	8	2	2	4	6	4	2	4	4	4	7	7															
e) Francuski jezyk (3 oddziały)	—	3	—	6	6	12	5	4	2	2	—	4	3	—															
f) Dzieje kraju rodzinnego	—	—	—	—	—	—	37	33	37	35	—	27	44	2															
g) Stenografia	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	4	—	—															
10. Stypendya.																													
Pobierało stypendya:																													
a) Z fundacyi Stanisława Kłosowskiego po 210 zlr.	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—															
b) Z fundacyi ordyn. Mieroszewskiego po 200 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
c) Z fundacyi Samuela Głowińskiego po 157 zlr. 50 ct.	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—															
d) Z fundacyi Żurawskiego po 157 zlr. 50 ct.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
e) Z fundacyi Laskowskich po 150 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
f) Z fundacyi Petryczyzna po 150 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
g) Z fundacyi c. k. Dyrekcyi skarbu po 150 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
h) Z fundacyi X. Borka po 100 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
i) Z fundacyi X. Harbina po 90 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
j) Z fundacyi X. Pilonia po 72 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
k) Stypendyum Miekiewicza po 71 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
l) Z fundacyi Tow. oficyalistów prywatnych po 70 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
m) Stypendyum familijne po 50 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
n) Z fundacyi Orłowskiego po 40 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
o) Z fundacyi Karczyńskiego po 30 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
p) Z fundacyi Hmonowskiego po 25 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
r) Z fundacyi Ołowskiego po 24 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
s) Z fundacyi Mężynskiego po 12 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
Ogólna liczba stypendysów															703														
Kwota stypendyjna wynosiła zlr.															300 307 50 467 50 2825 50														
11. Zapomogi jednorazowe.																													
a) Z fundacyi Radziwiłłowskiego po 60 zlr. po 60 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
b) Z fundacyi Taniackiewicza po 12 zlr. po 40 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
c) Z fundacyi X. Raciborskiego po 20 zlr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—															
Ogólna liczba uczniów, którzy otrzymali zapomogę jednorazową.															2														
Kwota zapomóg (zlr.)															32 92 392														

A) Zapomogi.

a) Dochód.

Wny Falter 1 złr. 90 ct.; Wna P. Świdorska 4 złr. 92 ct.; Wna P. Goldstein 2 złr.; Wny Dyr. Stawarski 6 złr.; X. Nowiński 2 złr.; Prof. Miklaszewski 1 złr.; Prof. Stroka 1 złr.; Prof. Dr. Molin 1 złr.; Prof. Krasnosielski 2 złr.; Cholewa Wojciech z VII. kl. 1 złr.; Walkowski Jan z IVb. kl. 80 ct.; uczniowie z IIIa. kl. 4 złr. 95 ct.; Majewicz Edmund z IIb. kl. 2 złr.; Komar Edward z IIc. kl. 5 złr. Razem 35 złr. 57 ct.

b) Rozchód.

Do szkolnej opłaty dołożono następującym uczniom: Zbosiowi Bronisławowi z Ia. kl. 10 złr.; S. T. z Ia. 1 złr.; Ł. W. z Ia. 2 złr.; Str. J. z Ic. 1 złr. 55 ct.; Ch. T. z IIb. 2 złr.; Gr. J. z IIb. 2 złr.; P. L. z IIb. 3 złr. 10 ct.; K. P. z IIIc. 1 złr.; P. F. z VII 4 złr.; oprócz tego otrzymali H. Sz. z Ic. 4 złr. 92 ct. (z fundacyi Wnej P. Świdorskiej); L. St. z VIII kl. 2 złr.; na pogrzeb ucznia W. Sz. z IIIb. 2 złr. Razem 35 złr. 57 ct.

UWAGA: JWny P. Swiejkowski ofiarował na pomoc koleżańską 50 złr. w. a., którą to kwotę podpisany Dyrektor odesłał do Wydziału Krajowego na zasilenie funduszu stypendyjnego im. Adama Mickiewicza. Wydział Krajowy przyjął tę kwotę dnia 5. lipca 1886. r. do L. W. Kr. 36525 jako art. dziennika stypendyjnego 1452. — Uczniowie kl. VII., synowie majątnych rodziców, zarządzili między sobą dozwoloną składkę w celu odbycia majówki. Gdy się rozeszła bolesna wieść o klęsce miasta Stryja, odmówili sobie przyjemności majówkowych i złożyli na ręce podpisanego Dyrektora 100 złr. w. a., przeznaczając je na wsparcie ubogich, pożarem poszkodowanych uczniów tamtego gimnazjum. Kwotę tę przesłał Dyrektor natychmiast do Dyrekcyi gimnazjum stryjskiego. Zastanawia nas atoli, że do dnia dzisiejszego nie otrzymaliśmy od rzeczonej dyrekcyi potwierdzenia odbioru i gdyby nie gwarancya urzędu pocztowego, byłibyśmy w niepewności, czy pieniądze dostały się na miejsce przeznaczenia.

B) Pomoc koleżańska uczniów niższego gimnazyum.

a) Dochód.

Pozostałość z roku zeszłego 12 złr. 50 cent.; miesięczne wkładki uczniów 46 złr. 75 ct.; kolenda zebrana podczas Bożego Narodzenia 52 złr. Razem 111 złr. 25 ct.

b) Rozchód.

Obiady 2 uczniom w taniiej kuchni i inne szkolne potrzeby przez 9 miesięcy, razem 64 złr. 10 ct.; dodano do opłaty szkolnej 9 złr.; dano na bibliotekę książek szkolnych 12 złr.; buty dla 4 uczniów 8 złr. 60 ct.; 2 surduciki i 2 pary spodni 11 złr. 30 ct.; naprawa starych ubrań 7 złr. 45 ct. Razem 112 złr. 45 ct. Niedobór 1 złr. 20 ct. pokryto z taks egzaminów prywatnych.

Uczniowie klas wyższych (V.—VIII.) utrzymywali pomoc koleżańską, każda klasa z osobna dla siebie, pod kierownictwem i kontrolą swych gospodarzy i wspierali biednych swych kolegów w porozumieniu z gospodarzem klasy. Jedynie klasa VII. udzieliła 6 złr. biednemu uczniowi klasy VIII. L. St., na sprawienie burnusa.

Nabytek tegoroczny do księgozbiorów i muzeów.

A) Biblioteka nauczycielska.

- 1) *Religia*: ks. Dąbrowski. Historia biblijna. Stary zakon.
- 2) *Filozofia*: J. Fr. Herbart's Sämmtliche Werke. — 3) *Pedagogia*: Encyklopedia wychowawcza. T. III. z. 5 - 8; Schmid, Encyclopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens. B. VI. Abt. 3., Bd. VII., Abt. 1, 2; Sprawozdanie ek. Rady szkolnej krajowej o stanie szkół średnich galic. w 1875—1883; Ustrój szkół średnich (odbitka z powyższego sprawozdania); 17. Jahresheft des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrer; Przegląd pedagogiczny; Weisungen zur Führung des Lehramtes. — 4) *Estetyka*: Brandes G. Die Literatur des 19. Jahrhunderts. Bd. I., V.
- 5) *Dzieła pomocnicze do jęz. łac.*: Jerzykowski, Zadania do tłumaczenia z polskiego na łac. dla średnich klas, Część I.; Samo-

lewicz, Ćwicz. łac. na kl. II.; Próchnicki, Przykłady do tłum. z jęz. pol. na łac. na kl. III.; Plüss H. T., Horazstudien; Dr. Lattmann, die Grundsätze f. d. Gestaltung d. lat. Schulgr.; Radtke, Materialien zum Uibersetzen aus dem Deutschen ins Lat.; Marquardt und Mommsen, Handbuch der römischen Alterthüme. Bd. VII. — 6. *Dzieła pomocnicze do jęz. greck.*: Curtius, gramatyka jęz. greck.; Schenkl-Samolewicz, Ćwiczenia greckie; Roscher, Ausführl. Lexikon der griech. und römischen Mythologie. Lief. 7; Buchholz, Die Homerischen Realien. Bd. III. Abt. 2.; Baumeister, Denkmäler des classischen Alterthums. Lief. 1—26; Müller J., Handbuch der classischen Alterthumswissenschaft. Bd. I. II.; Dr. Curt von Oppen, der griechische Unterricht mit Bezugnahme auf den neuen Lehrplan; Dr. E. Weissenborn, Aufgabensammlung zum Uibersetzen ins Griech. a) im Anschluss an die Lectüre f. d. oberen Classen behufs Einübung der unregelm. Verba, b) im Anschluss an die Lectüre f. d. ob. Cl. der Gymnasien, c) im Anschluss an die Lectüre von Xenophons Anabasis; Dr. Schneidewin, Homerisches Vocabularium sachlich geordnet; Dr. Kaegi, Griechische Schulgrammatik. — 7) *Autorowie łacińscy*: T. Livii ab urbe condita libr. partes selectae. Ed. Grysar; M. Tullii Ciceronis Scripta quae manserunt omnia, ed. C. T. W. Müller. Part. II. vol. II.; P. Ovidii Nasonis carmina selecta. Ed. Grysar; Ciceros ausgewählte Reden, erkl. v. K. Halm; Die Historien des Tacitus, erkl. v. Ig. Prammer; O. Horatii Flacci carmina selecta f. d. Schulgebrauch, herausgeg. v. Dr. J. Huemer; Catullus, erkl. v. A. Riese; Die Metamorphosen des P. Ovidius Naso, erkl. v. H. Magnus; Titi Livii ab u. c. lib. I. erkl. v. M. Heynacher, lib. II. v. Klett, lib. XXI. i XXII. v. Luterbacher; C. I. Caesaris Commentarii de bello gallico, erkl. v. R. Menge; P. Vergilii Maronis Aeneis, erkl. v. Brosin; O. Vergili Maronis Aeneis, erkl. v. Klouček; M. T. Ciceronis Orationes selectae. Ed. H. Nohl; Des Q. Horatius Flaccus Oden, übers. v. C. Bruch; M. T. Ciceronis in Catilinam orationes, ed. R. Novak. — 8) *Autorowie greccy*: Herodots Perserkriege, herausgeg. v. Hintner; Herodotos, erkl. v. Sitzler, Bd. VII.; Herodoti de bello persico, ed. A. Wilhelm; Xenophons Anabasis, erkl. v. Rehdaut; Mathias Adolf, Kommentar zu Xenophons Anabasis; Platos ausgewählte Dialoge, erkl. v. C. Schneller; Xenophons Anabasis, erkl. v. Hansen; Ausgewählte Reden des Demosthenes, erkl. v. Sörgel; Homeri

Odysseae epitome, ed. Fr. Pauly; Homers Odyssee, erkl. v. F. Weck; Sophoclis tragoediae, ed. J. Kral. — 9) *Język niemiecki*: Harwot, Deutsches Lehr- und Lesebuch I. Bd; Hamerski, Deutsches Lesebuch f. d. V. Cl.; Haym R., Herder nach seinem Leben und seinen Werken.; Uhlands Schriften; Fr. Schiller, Geschichte seines Lebens und Charakteristik seiner Werke von Fr. Weltrich; Jahresbericht über die Erscheinungen aus dem Gebiete der germanischen Philologie. — 10) *Język polski*: Dr. Mecherzyński, Przykłady i wzory. T. I.; Wypisy polskie dla klas wyższych, T. II.; Morsztyn Jan Andrzej, poezye; Sienkiewicz H., Potop; A. Mickiewicz, Zarys biograficzno-literacki, przez P. Chmielowskiego; Dzieła Józefa Szujskiego; P. Chmielowski, Złota przędza poetów i prozaików polskich; Jana Kochanowskiego dzieła wszystkie; Kraszewski J. I. Na królewskim dworze; Bełcikowski A. Ze studyów nad literaturą polską; Parylak P., Marya Malczewskiego; Parylak P., Treny Kochanowskiego. — 11) *Historja*: Pawiński, Akta metryki koronnój; Gindely, Dzieje powszechne; Welter-Sawczyński, Dzieje powszechne. T. I.; Durny, Gesch. des röm. Kaiserreichs; Lewicki, Zarys historyi Polski; Duncker M., Gesch. d. Alterthums; Bussolt G., Griechische Gesch.; Ranke L., Die Osmanen und die spanische Monarchie; Pacowie, Senatorowie i Kniaziowie litewscy, przez J. Wolffa; Wolff J., Senatorowie i Dygnitarze litewscy; Jannsen J., Gesch. d. deutschen Volks; Maurenbrecher, Gesch. d. kathol. Reformation; Weiss, Lehrb. der Weltgeschichte. — 12) *Geografia*: Baraniecki i Dziedzicki, Geografia; Słownik geogr. tom VI. i VII.; Unser Wissen von d. Erde; Petermanns Mittheilungen; die österr. Monarchie in Wort und Bild; Dr. Umlauf, Die Alpen; Dr. Szaraniewicz, Statystyka mon. austr. węg.; Chavanne, Physik-statist. Handatlas; Seibert, Zeitschrift f. d. Schulgeogr.; Dr. Umlauf, Deutsche Rundschau; Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien. — 13) *Matematyka*: Moćnik-Stanecki, Geometrya; Moćnik-Bodyński, Arytmetyka; Kleyer, vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung (z. 171—242). — 14) *Fizyka*: Weinhold, Vorschule der Experimentalphysik. — 15) *Historja naturalna*: Łomnicki, Mineralogia i Geologia; Encyclopädie der Naturwissenschaften (d. c.); Dippel Leop., Grundzüge der allg. Mikroskopie; Leunis L., Synopsis der drei Naturreiche; Heumann K., Anleitung zum Experimentieren bei Vorles. über unorg. Chemie; Dippel L.,

Mikroskop und seine Anwendung; Bronn, Klassen und Ordnungen des Thierreiches; Wiener entomologische Zeitg. — 16) *Słowniki*: Ebeling, Lexicon Homericum (d. c.); Grimm, Deutsches Wörterbuch (d. c.); Vollbrecht, Wörterbuch zu Xenophons Anabasis; Du Lange-Favre, Glossarium; Wolfflein, Archiv f. latein. Lexicographie; Bibliotheca philologica classica. — 17) *Czasopisma*: Annalen der Physik und Chemie, mit Beiblättern; Philologische Wochenschrift; Zeitschrift f. öst. Gymnasien; Magazin f. d. Literatur des Auslandes; Przewodnik naukowy i literacki; Biblioteka Warszawska; Przegląd polski; Kosmos; Sybel's Historische Zeitschrift. — 18) *Rozmaitości*: Atheneum; Estreicher, Bibliografia XIX w. — 19) *Różne języki*: Jagić, Archiv f. slavische Philologie (d. c.); Böhtlinek, Sanskrit-Wörterbuch (d. c.). — 20) *Lingwistyka*: Curtius G., Zur Kritik d. neuesten Sprachforschg.; Delbrück, Die neueste Sprachforschg.; Zimmer H., Altindisches Leben; Brugmann, Zum heutigen Stand der Sprachwissenschaft.

B) Czytelnia dla uczniów wyższego gimnazyum.

Zathey, Uwagi nad Panem Tadeuszem. — J. W. Goethe, Herman i Dorota, przekład T. Ziemy. — Ziembka T., Estetyka poezyi. — Pisma Hugona Zatheya. T. I. — M. Gertruda, Z życia Polki (dar). — Kraszewski, Banita. — Kraszewski, Infantka. — Kraszewski, Bajbuza. — Belza, Z doliniedoli (dar). — Stroka, Poezye Piotra Frąca (dar). — Leliwa L. Piotr, Jan Sobieski i jego wiek. — Szujski, Cecora i Chocim. — Wędrychowski, Słów kilka o J. Korzeniowskim, Dominiku Magnuszewskim, Balińskim, Fredrze (dar). — Zarański, O sposobach wykładania dziejów (dar). — Wyprawy misyjne do krajów Zambezy. — Hołubowicz, Bułgaria. — Stęczyński, Tatry (dar). — Humboldt, Kosmos. — Ekielski, Miasto Kazimierz i budowle akademickie. — Pamiętnik Towarzystwa tatrzańskiego. — W. Pol, Obrazy z życia i natury (dar). — Amicis, Hiszpania (dar). — Turley, Schwedische Volksmärchen. — Niedergesäss, Der Taubstumme. — Niedergesäss, Der abenteuerliche Simplicissimus. — Treumund Whelp, Mabel Faughan. — Thomson-Boguski, Elektryczność i magnetyzm. — Misye katolickie, t. V. — Przegląd powszechny. — Przyrodnik. — Wędrowiec. — Schweiger von Lerchenfeld Griechenland (dar. ks. Wład. Lubomirskiego).

C) Czytelnia dla uczniów niższego gimnazjum.

Zielińska, Wyprawa po złote runo. — Cooper, Pogromca zwierza i ostatni Mohikanin. — J. B. W., Krótkie wiadomości z dziejów polskich (dar). — Skrzypiński, Krótki rys historyi powszechnéj (dar).

D) Księgozbiór dla ubogich uczniów niższego gimnazjum.

Z początkiem roku szkolnego liczył ten księgozbiór 1142 książek w znacznej części zniszczonych lub nieużywanych, jak geografia Bellingera (96 egz.), gramatyka i Wypisy Rebeny (125 egz.) itd. Możliwych do użycia była zaledwie $\frac{1}{3}$ część. W ciągu roku przybyło książek 181. Prof. Dr. Molin ofiarował 10 egz. swojej gramatyki i 10 egz. wypisów niemieckich, p. Gustawicz 3 egz. Geografii monarchii austro-węgierskiej przez Dra Szaraniewicza.

E) Gabinet historyi naturalnej.

Przybyły: mikroskop z zakładu Zeissa w Jenie, wartości 231 złr. 26 ct.; zbiór ślimaków i małżów krajowych zestawiony przez zawiadowcę; zeszyt 10-ty tablic ściennych do zoologii Leuckarta i Nitzschego, zakupiony od Friedleina w Krakowie; melanteryt, dar Szybalskiego, ucznia IIIc.; baryt ze Swoszowic, dar Lipowicza, ucznia IIIa.; beryl, dar Chrzanowskiego, ucznia IIIa.; 4 okazy ametystu i 2 okazy rogowca, dar X. Czekalskiego; kalcyt z Andreasberg, szmaragd z Salzburga, markazyt z Przybramu, markazyt z Schlaggenwald, i magnetopiryt z Deutschbrod, dar prywatny; 15 skamielin kredowych, dar Reya, ucznia VIb.; 2 skamieliny węglowe i 1 trzeciorzędowa, dar p. Stengla; 50 skamielin brunatno-jurasowych z Czerny, dar Walkowskiego, ucznia IVb.; 100 takichże skamielin, dar Kowalczyka, ucznia IIa.

F) Gabinet fizyczny.

1. Przyrząd do okazania prawa Mariotte'a podług Weinholda. — 2. Spadkownica podług Weinholda. — 3. Machina odśrodkowa z kilku przyrządami pobocznymi. — 4. Model regulatora odśrodkowego. — 5. Syrena Seebeck'a. — 6. Syrena Savart'a. — 7. Elektroskop. — 8. Przyrząd Riess'a do okazania

influencyi. — 9. Voltameter. — 10. Przyrząd Kipp'a. — 11. Kąpiel wodna. — 12. Posługacz uniwersalny. — 13. Towary szklane. — 14. Chemikalia. — 15. Dźwignia metalowa. — 16. Przyrząd do wykazania równoległoboku sił.

G) Nabytek do zbioru map.

Kozenn-Janota: Półkula wschodnia i zachodnia (2 egz.). — Kozenn-Janota: Europa polityczna (3 egz.). — Kiepert H.: Physikalische Wandkarte von Nord- und Süd-Amerika (po 1 egz.). — Kiepert H.: Politische Wandkarte von Asien (2 egz.). — Kiepert H.: Deutsches Reich (pol.) (2 egz.). — Petermann: Deutschland (fiz.) (2 egz.).

H) Nabytek do nauki rysunków.

Farbige Elementar-Ornamente von H. Schulze (22 tabl.). — Początkowa (w konturach) ornamentyka przez Taubingera (120 tabl.). — Początkowe (w konturach) wzory głów przez Taubingera (48 tabl.). — 26 wzorów do głów i figur ludzkich. — 2 wzory do akwarelli. — Wzory do kolorowej ornamentyki (7 tabl.). — Wzory do rysowania piórem ornamentyki (96 tabl.). — 2 odlewy z gipsu w medalionach (dar ucznia St. Wyspiańskiego). — 10 wzorów do nauki rysowania piór (dar p. Wal. Eljasza).

WYNIK EGZAMINU DOJRZAŁOŚCI.

Przystąpiło do egzaminu uczniów publicznych	30
Obcych	7

Z uczniów publicznych otrzymało:

Świadectwo dojrzałości z odznaczeniem	3
„ dojrzałości	21
Będzie poprawiało egzamin z jednego przedmiotu	5
Cofnięto na rok	1
Z obcych otrzymał świadectwo dojrzałości	1
Będzie poprawiał egzamin z jednego przedmiotu	1
Cofnięto na rok	2
Odstąpiło od ustnego egzaminu	3

Z 25 abiturientów, którzy otrzymali świadectwo
dojrzałości, udaje się:

Na teologią	3
„ prawo	6
„ medycynę	6
„ wydział filozoficzny	5
„ politechnikę	2
Do akademii rolniczej	1
„ „ leśniczej	1
„ „ wojskowej	1

Czytelnia dla uczniów niższego i wyższego gimnazyum.

Czytelnia młodzieży niższego gimnazyum obejmuje 245 polskich, 101 niemieckich książek; wyższego zaś polskich książek 865, niemieckich 339, francuskich 36. Młodzież niższego gimnazyum otrzymywała książki co niedzielę, wyższego zaś w poniedziałek, środę i czwartek. Udział uczniów w czytaniu książek w pierwszym i drugim półroczu roku szkolnego 1886. przedstawia następująca tabelka:

K l a s a :		Ia.	Ib.	Ic.	IIa.	IIb.	IIc.	IIIa.	IIIb.	IIIc.	IVa.	IVb.	V.	VIa.	VIb.	VII.	VIII.
Liczba uczniów wypożyczających	I. półr.	7	12	2	13	5	13	3	2	7	9	25	11	7	9	15	14
	II. półr.	5	13	6	13	9	17	5	—	9	9	19	9	7	11	18	9
Liczba książek wypożyczonych	I. półr.	29	27	5	31	7	25	8	4	17	20	49	26	19	17	63	25
	II. półr.	22	39	11	29	15	41	11	—	23	14	31	13	14	23	79	19

W I. półroczu wypożyczało książki uczniów 154 (o 36 więcej niż w r. 1885), w II. półroczu 159 (o 29 więcej niż w roku 1885). Żywy udział w czytaniu książek brali następujący uczniowie: Kopiński Mieczysław z IIa., Fabiański Henryk z IIb., Lewek Edward z IIc., Lustgarten Maksymilian z IIIb., Peterseim Leon i Zachemski Jakób z IVa., Biela Karol, Fabiański Władysław, Kaden Henryk, Nowakowski Stanisław, Pytel Franciszek

z IVb., Blumenstok Henryk, Paulisch Zygmunt, Rosner Feliks, Stanowski Zygmunt z V., Akermann Adam, Doleżan Wiktor, Ehrenberg Kazimierz, Szczytnicki Stanisław z VIa., Biliński Andrzej, Bystrzonowski Antoni, Lewkowicz Fr. Ksaw. i Noga Feliks z VIb., Eliaz Franciszek, Kaczmarczyk Antoni, Krupski Leopold, Pilchowski Stanisław, Süsser Ignacy z VII., Miczek Franciszek, Panczakiewicz Michał, Piechowski Wiktor, Śliwiński Oskar, Starowiejski Leon i Wilkosz Jan z VIII.

Przy porządkowaniu, wydawaniu i odbieraniu książek z uznania godną gorliwością pomagali zawiadowcy czytelní, uczniowie: Wilkosz Jan z kl. VIII. i Szczytnicki Stanisław z kl. VIa.

Ważniejsze rozporządzenia władz szkolnych.

1. J. E. Pan Minister W. i O. reskrytem z 23. lipca 1885. l. 11853 zabronił ze względów zdrowotnych używania w szkołach wszelkiego rodzaju zeszytów i tabliczek kratkowanych.

2. J. E. Pan Minister W. i O. reskrytem z 28. listopada 1885. l. 22131 rozporządził, aby dzień 19. listopada, jako dzień Imienin Jój Cesarsko - Królewskiej Mości, Najjaśniejszej Pani, był bezwarunkowo wolnym od nauki szkolnej.

3. Wys. c. k. Ministerstwo W. i O. reskrytem z 10. grudnia 1885. l. 22906 rozporządziło, że od bieżącego roku szkolnego począwszy, egzamina dojrzałości odbywać się mają z końcem roku szkolnego, jako w jedynym terminie głównym. W terminie drugim (jesiennym) mogą być przypuszczeni do egzaminu tacy abiturycenci, którzy egzaminu rozpoczętego w terminie głównym bez własnej winy dokończyć nie mogli, jakoteż ci, którzy jako uczniowie klasy VIII. otrzymali pozwolenie poprawienia egzaminu z jednego przedmiotu po wakacyach. Cofnięcie zaś nie może nastąpić na czas krótszy jak na rok. Oraz wprowadziło Wys. c. k. Min. pewne ułatwienia dla abiturycjentów, przystępujących po raz wtóry do egzaminu dojrzałości.

4. Wys. c. k. Ministerstwo W. i O. reskr. z 26. stycznia 1886. l. 1512 zniosło lokacye uczniów przy każdej półrocznej klasyfikacyi.

5. Wys. c. k. Ministerstwo W. i O. reskrytem z 9. marca

1886. l. 4452 zmieniło dotychczasową skalę censur klasyfikacyjnych, znosząc a) w skali dotyczącej przedmiotów stopień „*znakomity*“, b) w skali obyczajów stopień „*wzorowe*“, wprowadzając natomiast po stopniu z obyczajów „*chwalebne*“, który staje się odtąd najwyższym stopniem, stopień „*zadowolniające*“ jako stopień niższy.

6. Wys. Ministerstwo W. i O. rozp. z 6. kwietnia 1886. l. 3340. przypomina dawniejsze rozporządzenie, według którego wzbronione jest wydawanie świadectw z egzaminów wstępnych.

7. Wys. c. k. Rada szkolna krajowa reskryptem z 30. kwietnia 1886. l. 157 przypomina rozporządzenie Wys. c. k. Ministerstwa z 25. paźdz. 1873. (Dz. rozp. Min. z 1873 Nr. 93 str. 611), według którego uczniom szkół średnich nie wolno tworzyć stowarzyszeń między sobą, albo należeć do stowarzyszeń utworzonych przez innych.

8. W myśl Wys. c. k. Ministerstwa W. i O. reskr. z 2. stycznia 1886. l. 85 Wys. c. k. Rada szk. kr. reskr. z 3. maja 1886. l. 5803 ustanawia dwa terminy do odbywania egzaminów wstępnych do klasy I., mianowicie z końcem roku szkolnego tj. 30. czerwca i 1., ewentualnie 2. lipca, i z początkiem nowego roku szkolnego, tj. 1., 2., ewentualnie 3. września. — W każdym z tych terminów rozstrzyga się o przyjęciu lub nieprzyjęciu ucznia do klasy I. stanowczo, a powtórzenie wstępnego egzaminu ani w tym samym ani w innym zakładzie nie jest dozwolone. — Na egzamina wstępne do klas wyższych (niż I. kl.), tudzież na egzamina poprawcze przeznaczają się dni 1. i 2., a ewentualnie 3. września, które to dni są wolne od nauki szkolnej. Nabożeństwo wstępne ma się przeto odbyć dnia 3. września, poczem d. 4. września rozpoczyna się regularna nauka szkolna.

9. W myśl rozporządzenia wydanego przez Wys. c. k. Ministerstwo W. i O. reskr. z 12. czerwca 1886. l. 9681. opłata szkolna, przypadająca w państwowych szkołach średnich za jedno półrocze, począwszy od roku szkoln. 1887. wynosi dla Krakowa 20 złr. w. a.

10. Wys. c. k. Ministerstwo W. i O. reskr. z 19. czerwca 1886. l. 4648 wydało wskazówki co do sposobu pobierania opłaty szkolnej.

Kronika Zakładu.

Rok szkolny 1886. rozpoczęto dnia 1. września uroczystém nabożeństwem i wezwaniem Ducha św. w kościele św. Anny.

Zastępca p. dr. Teofil Krasnosielski zamianowany został reskr. Wys. c. k. Ministerstwa W. i O. z 25. sierpnia z. r. l. 15612 rzeczywistym nauczycielem gimnazjum w Wadowicach, przydzielony zaś do gimnazjum św. Anny.

Naukę stenografii tyle pożądaną dla uczniów objął na mocy uchwały Wys. ck. Rady szk. kraj. z 20. września z. r. l. 11021 profesor III. gimnazjum p. Dr. Władysław Kosiński, naukę zaś śpiewu po p. Walentym Decu zastępca nauczyciela tutejszego gimnazjum p. Dr. Stanisław Klemensiewicz z upoważnienia Wys. c. k. Rady szk. kraj. udzielonego reskryptem z 27. sierpnia z. r. l. 9809, złożywszy świetnie egzamin rządowy z tego przedmiotu przed komisją egzaminacyjną we Wiedniu.

Dnia 4. października obchodziło gimnazjum Imieniny Najjaśniejszego Pana, a dnia 19. listopada Najdostojniejszej Cesarzowej uroczystém nabożeństwem w kościele św. Anny i odśpiewaniem hymnu narodowego.

Z początkiem października popadł zastępca nauczyciela p. Józef Feichtinger w ciężką chorobę, która go do łóża słabości przykuła. Przedmioty przez niego udzielane rozebrali nauczyciele, t. j. język łaciński w VIb. zastępca p. Sędzimir, język niemiecki w IIIc. p. Dr. Molin, jęz. łaciński w VIa. Dyrektor.

Przyszedłszy do zdrowia p. Feichtinger objął 1. kwietnia naukę jęz. łacińskiego w obu oddziałach VI. klasy, nauka niemieckiego języka pozostała w obcych rękach.

W środę dnia 17. lutego odbył się w amfiteatrze Nowodworskiego poranek muzykalno-deklamacyjny, ku uczczeniu 500-letniej rocznicy zaślubin królowej polskiej Jadwigi z księciem litewskim Jagiełłą, a témsamém pierwszego połączenia Litwy z Polską. Na zakończenie wyłuszczył młodzieży znaczenie tego zdarzenia historycznego prof. p. Juliusz Miklaszewski. Obchód ten przyszedł do skutku staraniem i kosztem uczniów VII. klasy i był wyłącznie uroczystością szkolną, do której publiczność nie miała przystępu.

Ustny egzamin dojrzałości terminu zimowego odbył się pod

przewodnictwem Czcigodnego P. Inspektora, Wgo Antoniego Czar-kowskiego, w dniach 31. marca do 3. kwietnia.

Zgłosiło się do tego egzaminu kandydatów 24. Z tych otrzy-mało świadectwo dojrzałości	17
cofnęto na rok.	1
„ bez terminu	2
nie przystąpił do ustnego egzaminu	1
odstąpiło od pisemnego egzaminu	3
Razem...	24

Z 17 uznanych za dojrzałych udało się :

Na teologią	5
„ prawo	8
„ medycynę	3
„ wydział przyrodniczy	1

Przy końcu marca zachorował prof. Juliusz Miklaszewski. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. udzieliła mu urlopu do końca roku szkolnego, przez co nastąpiły zmiany w rozkładzie przedmiotów i wstąpił do grona nauczycieli p. Józef Limbach, doktor filozofii, objąwszy w IIIc. i Ib. naukę języka niemieckiego.

Młodzież szkolna przystąpiła 3 razy do św. Sakramentów pokuty i ołtarza i odbyła z początkiem Wielkiego Tygodnia ewi-czenia duchowne, rekolekcjami zwane; dnia 19. czerwca przy-stąpili uczniowie kl. VIa.+b. do Sakramentu bierzmowania, przy-jąwszy po wysłuchaniu Mszy św. z rąk Najprzewielebniejszego Arcypasterza Jego Excell. ks. Biskupa Albina Dunajewskiego Komunią świętą.

W dniach 21.—26. czerwca odbył się pod kierownictwem W. Pana Inspektora Czarkowskiego egzamin dojrzałości, którego wynik powyżej cyframi przedstawiono.

Dnia 28. czerwca odprawiło się w kościele gimnazyalnym dla młodzieży szkolnej nabożeństwo żałobne za duszę s. p. cesa-rza Ferdynanda.

Rok szkolny zakończono 30. czerwca nabożeństwem dzięk-czynnym i rozdaniem świadectw półrocznych.



KLASYFIKACYA UCZNIÓW.

(Tłusciejszy druk oznacza stopień pierwszy z odznaczeniem).

Klasa I. A.

Uczniów wpisanych 49.

Laberschek Jan
Roszkiewicz Wład.
Baranowski Michał
Brynička Leon
Jachymiak Franciszek
Jachymiak Jędrzej
Janikowski Wład.
Koneczyński Tad.
Krupski Władysł.

Kwaśny Emil
Langrock Rudolf
Łukowski Wiktor
Małachowski Eug.
Michalik Stanisław
Minasowicz Józef
Nowak Franciszek
Roskovits Teodor
Rybak Wojciech

Skoćie Dušan
Starzewski Stan.
Stolfa Emil
Swiba Teodor
Szwarc Jan
Tomaszewski Wład.
Wątopek Karol
Zamorski Emil

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 2.
Postępu nie otrzymało 9. Opuściło zakład 12.

Klasa I. B.

Uczniów wpisanych 42.

Dobrzycki Stanisław
Długacz Jan
Berger Aron
Bizański Wład.
Bobowski Wład.
Bzowski Karol
Fiedor Michał

Gisman Karol
Jurasiński Franciszek
Kaleta Tomasz.
Kantorek Stefan
Kowalski Stanisław
Kwiatkowski Stan.
Lenartowicz Jan

Lustgarten Jakób
Mazurkiewicz Józef
Piątkowski Józef
Piech Sebastian
Pollak Karol
Sikorski Józef
Zakrzewski Ludwik

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 5. Z powodu choroby będzie robił egzamin uzupełniający 1. Postępu nie otrzymało 10. Opuściło zakład 5.

Klasa I. C.

Uczniów wpisanych 47.

Chałampowicz R.
Czarny Kazimierz

Domański Stan.
Hanuszek Szymon

Ptaszyński Józef
Barberowski Karol

Bogucki Stanisław
Brzeski Henryk
Budzaszek Feliks
Deiches Izidor
Doening Mieczysław
Dobrowolski Stan.
Dymek Jan
Grabowski Eug.
Hankus Edward
Kostka Alfred

Kościółek Andrzej
Kowalik Jan
Krępa Aleksander
Krzyszkowski Eerd.
Kudelski Franciszek
Łukowicz Antoni
Michalik Gustaw
Ozga Wojciech
Pihuta Kalikst
Pomietlarz Wład.

Prochal Tomasz
Pollaschek Fryd.
Rzepecki Adam
Sikorski Władysł.
Skowronski Stan.
Słomnicki Wiktor
Stempel Jan
Świądrowski Wład.

Postępu nie otrzymało 10. Opuściło zakład 3.

Klasa II. A.

Uczniów wpisanych 52.

Bogdani Maryan
Chranicki Jan
Jędrýs Józef
Kasperek Adam
Łubkowski Wład.
Nitsch Roman
Olszewski Jan
Pischinger Ernest
Wierzbiicki Zygmunt
Vopalka Bronisław
Andrysik Franciszek
Antonowicz Jan
Bartosiniński Jan

Brochocki Tadeusz
Bukowski Henryk
Bukowski Jan
Bzowski Stefan
Chełmecki Izidor
Dybała Jędrzej
Dzianott Bolesław
Ehrenpreis Edward
Galant Maryan
Gaertner Jan
Grabowski Seweryn
Januszkiewicz Adam
Kopiński Mieczysław.

Kowalczyk Wład.
Krywult Jan
Kućmyda Józef
Lewicki Stanisław
Materna Witalis
Nowak Kasper
Pik Franciszek
Reich Artur
Schreiber Samuel
Szancer Alfred
Żeleński Tadeusz

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 3.
Postępu nie otrzymało 8. Opuściło zakład 4.

Klasa II. B.

Uczniów wpisanych 52.

Kühnel Artur
Majewicz Adam
Masłowiec Antoni
Fabian Jędrzej
Bernaciński Fran.
Bross Loebel
Ciechanowski Stefan
Długoszewski Jan
Fabiański Henryk
Fischer Jan

Frommer Artur
Fronc Władysław
Gawroński Juliusz
Jaglarz Józef
Janiga Stanisław
Kamieński Jakób
Kostka Karol
Krystyniacki Leop.
Łukawski Henryk
Olszewski Bolesław

Paszcza Kasper
Piątek Tadeusz
Prysak Bolesław
Raźny Józef
Romiszowski Adam
Schöppl Emil
Tellek Władysław
Traubner Józef

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 5.
Postępu nie otrzymało 10. Opuściło zakład 9.

Klasa II. C.

Uczniów wpisanych 38.

Komar Edward
Kuzniar Feliks

Lebiedzki Jan
Wróblewski Wład.

Ceremuga Władysław
Dziedzicki Kazimierz

Ehrenpreis Ignacy
Gatlik Franciszek
Grodzicki Władysław
Grzybowski Grzegorz
Hudaszek Adam
Korta Jan

Lewek Edward
Nagel Jan
Piechnik Józef
Schmelz Józef
Silbermann Jakób
Szyszka Stanisław

Tymkiewicz Antoni
Tyralik Jan
Unger Eugeniusz
Urbański Władysław
Walkosz Jakób
Wesper Maryan

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacjach 5.
Postępu nie otrzymało 6. Opuściło zakład 3.

Klasa III. A.

Uczniów wpisanych 43.

Luboradzki Seweryn
Pick Karol
Bittner Stanisław
Chrzanowski Jan
Czerlunczakiewicz E.
Gładysek Józef
Gross Kazimierz
Homolacs Emanuel
Kapuściński Jan
Karcz Jan

Kluczycki Stanisław
Koziański Kazimierz
Krasucki Zygmunt
Króźel Jan
Krzeptowski Wojciech
Liebeskind Juda
Matejko Władysław
Nitsch Kazimierz
Olszanik Władysław
Rybarzewski Franc.

Sawiczewski Wacław
Sentyrz Michał
Szczerba Adam
Szuzic Maksymilian
Turowicz Kazimierz
Wątopek Adolf
Wilson Stanisław
Ziemiański Stanisław

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacjach 4.
Postępu nie otrzymało 5. Opuściło zakład 6.

Klasa III. B.

Uczniów wpisanych 47.

Gans Jan
Ader Maurycy
Batko Wojciech
Ciechanowski Zygm.
Fischer Józef
Goldfinger Samuel

Izenberg Ozyasz
Jaworski Zygmunt
Łowczowski Kazim.
Małachowski Bolesław
Merz Ludwik
Mrdaček Emil

Niewolkiewicz L.
Rutkowski Jan
Toczyski Adam
Wójcikiewicz Henr.
Zaplatański Józef
Zdański August

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacjach 3.
Postępu nie otrzymało 12. Opuściło zakład 14.

Klasa III. C.

Uczniów wpisanych 39.

Derndarsky Budziszaw
Szczurek Józef
Chytroś Stanisław
Dulski Tadeusz
Furko Julian
Gorączko Jan
Jaworski Józef
Kłapa Waleryan

Kraupa Rudolf
Kukulski Bronisław
Kulig Julian
Nowak Witold
Ocetkiewicz Józef
Panek Gwidon
Parzyński Jan
Rozpond Franciszek

Schumach Karol
Stopka Andrzej
Stopnicki Michał
Swolkiń Bogusław
Szybalski Bronisław
Torba Wojciech
Trzop Jan
Wilkuszewski Wł.

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacjach 5.
Postępu nie otrzymało 8. Opuściło zakład 2.

Klasa IV. A.

Uczniów wpisanych 37.

Bocheński Zygmunt	Gędziński Jan	Peterseim Leon
Zachemski Jakób	Goldstein Izrael	Smidowicz Alojzy
Ablewicz Władysław	Karaś Andrzej	Stopa Piotr
Bannet Józef	Kozłowski Mieczysław	Wiśniowiec Maksym.
Fialka Henryk	Neuberger Adolf	Wrona Michał

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 7.

Postępu nie otrzymało 9. Opuściło zakład 6.

Klasa IV. B.

Uczniów wpisanych 39.

Fabiański Władysław	Guziński Jan	Prysak Władysław
Jasiński Tadeusz	Kleczyński Wład.	Pytel Franciszek
Kaden Henryk	Kluczycki Fran.	Stadnicki Stefan
Okęcki Stanisław	Kosz Teodor	Szpadrowski Ignacy
Siwak Michał	Kubalski Edward	Szukiewicz Maciej
Biela Karol	Lenartowicz Stefan	Wałkowski Jan
Blumenfeld Fryd.	Lniski Kazimierz	Więclaw Bogumił
Bukowski Roman	Łukasik Czesław	Wyrobek Zygmunt
Cholewa Józef	Nitsch Leonard	Younga Stanisław
Cyfrowicz August	Nowakowski Stan.	Zubrzycki Stanisław

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 2.

Postępu nie otrzymało 3. Opuściło zakład 4.

Klasa V.

Uczniów wpisanych 58.

Majewski Tadeusz	Goldfinger Albert	Lewandowski Kazimierz
Marowski Kazimierz	Górecki Edward	Lipkowski Benedykt
Paulisch Zygmunt	Gretschel Henryk	Mieroszewski Feliks
Rosner Feliks	Hodur Franciszek	Miziura Andrzej
Stanowski Zygmunt	Jaglarz Franciszek	Olas Franciszek
Blumenstok Henryk	Jagła Stanisław	Paluch Karol
Bromberger Arnold	Jordan Roman	Pieguzewski Winc.
Doliński Maryan	Kalczyński Teodor	Ruff Salamon
Epstein Tadeusz	Krzyżanowski Adam	Wróblewski Winc.
Estreicher Tadeusz	Lax Aleksander	Wyrokek Stanisław

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 5. Z powodu choroby przystąpi do egzaminu uzupełniającego 1. Postępu nie otrzymało 10. Opuściło zakład 12.

Klasa VI. A.

Uczniów wpisanych 30.

Skatka Józef	Deiches Arnold	Hirsch Dawid
Akerman Adam	Doleżan Wiktor	Kopernicki Stanisław
Czerwiński Kazimierz	Ehrenberg Kazimierz	Krystek Piotr

Kwieciński Wincenty
Małachowski Zdzisław
Mazurkiewicz Józef

Mieroszewski Józef
Opieński Henryk
Paleczek Kazimierz

Stonawski Paweł
Takuski Jakób
Warzycki Franciszek

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 4.
Postępu nie otrzymało 5. Opuściło zakład 3.

Klasa VI. B.

Uczniów wpisanych 30.

Biliński Andrzej
Bystrzonowski Ant.
Górski Józef
Kulig Ludwik
Lewkowiec Ksawery
Matlakiewicz Karol

Noga Feliks
Pawłuszkiewicz August
Pick Rudolf
Pilchowski Stanisław
Pisek Henryk
hr. Rey Ludwik

Różycki Leon
Rzymkowski Feliks
Skuciński Jan
Styczeń Paweł
Szpor Łucyan
Worek Jan

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 4.
Postępu nie otrzymało 5. Opuściło zakład 3.

Klasa VII.

Uczniów wpisanych 52.

Czesznák Stefan
Eliasz Franciszek
Estreicher Stanisław
Pilchowski Stanisław
hr. Szeptycki Kazimierz
Wyrobek Wacław
Zanietowski Józef
Bittner Zygmunt
Brandys Jan
Cieź Ignacy

Eljasz Stanisław
Górka Józef
Kaczmarezyk Antoni
Kotulecki Tomasz
Krupski Leopold
Lewandowski Karol
Małachowski Władysław
Mehoffer Józef
Michalik Kazimierz
Nowicki Jan

Pietraszkiewicz St.
Piotrowski Feliks
Radomyski Jan
Strzępek Andrzej
Tolłoczko Edward
Trzeński Bogusław
Węgrzynek Stanisław
Younga Jerzy
Zdański Zygmunt

Może poprawić z jednego przedmiotu po wakacyach 4. Podda się egzaminowi uzupełniającemu 1. Postępu nie otrzymało 10. Opuściło zakład 8.

Wynik egzaminu dojrzałości.

Do egzaminu dojrzałości przystąpiło 30 uczniów publicznych.

Za dojrzałych uznani:

Bogusz Józef
Chmiel Adam
Janikowski Ludwik
Ciechanowski Stanisław
Fabiański Julian
Friedberg Gwidon
Górski Ksawery
Kapel Jan

Klinkowski Ludwik
Lenartowicz Kazimierz
Lauterbach Izrael
Lauterbach Mojżesz
Miczek Franciszek
Miński Adam
Panczakiewicz M.
Piechowski Wiktor

Raab Józef
Rutkowski Maksym.
Śliwiński Oskar
Sobieszezański Lud.
Starowiejski Leon
Stoch Stanisław
Tański Teodor
Zapała Melchior

Będzie poprawiało egzamin z jednego przedmiotu 5, cofnięto na rok 1. — Zgłosiło się do tego egzaminu 7 eksternistów; z tych otrzymał świadectwo dojrzałości 1, pozwolenie poprawienia z jednego przedmiotu 1, cofnięto na rok 2, odstąpiło od egzaminu ustnego 3.

W Krakowie, dnia 15 lipca 1886.

Ignacy Stawarski
dyrektor.